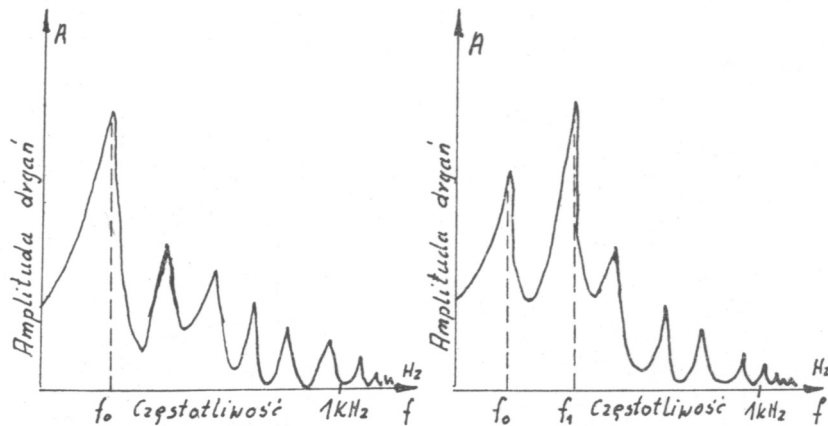


6. REDUKCJA OBIEKTU MECHANICZNEGO DO MODELU O JSS

Mimo że rozważaliśmy w poprzednim punkcie modele układów o dwu stopniach swobody, to w zastosowaniach nie wyszliśmy poza ramy szeregowego połączenia dwu układów o jednym stopniu swobody. Typowym przykładem jest tu zagadnienie eliminacji drgań, gdzie do znanego modelu układu głównego, dołączamy znany, nastrojony odpowiednio układ dodatkowy zwany eliminatorem drgań. Widać stąd, że nasze potrzeby określenia parametrów modelu, masy, sztywności, tłumienia nie wykraczają poza redukcje obiektu mechanicznego (np. układu głównego, czy dodatkowego) do jednego stopnia swobody. Z natury rzeczy metody określenia nie są dokładne lecz przybliżone. Ich źródło leży w głównej mierze w zasadach mechaniki. I tak zasada zachowania energii mechanicznej jest podstawą metod Rayleigh'a oraz Dunkerley - Southwela, którymi zajmujemy się niżej, zasada najmniejszego działania służy jako podstawa do metody Ritza, zaś metodę Galerkiną można interpretować na gruncie zasady prac przygotowanych. Nie mając miejsca na szersze oświetlenie tych metod zajmujemy się jedynie trzema pierwszymi, a zainteresowanych odsyłamy do bogatej literatury przedmiotu [16,18,19,26,27].

6.1. CEL I MOTYWACJA METOD PRZYBLIŻONYCH

Rzeczywiste obiekty mechaniczne a także ich elementy to skomplikowane układy o ciągłym rozkładzie własności mechanicznych: inercji, sztywności i tłumienia. W istocie więc własności te są funkcjami promienia wodzącego r , tak że $c = c(r)$, $k = k(r)$, $m = m(r)$. Chcąc więc w miarę dokładnie analizować własności dynamiczne obiektów i ich elementów składowych, należy rozwiązywać układy równań różniczkowych cząstkowych ze skomplikowanymi warunkami brzegowymi. Ograniczając się jedynie do prostych elementów składowych obiektów, możemy je przybliżać modelami układów ciągłych, takich jak: wałek pracujący na skręcanie, pręt ściskany, belka zginana, płyta, powłoka. Rozwiązywanie równań ruchu i szukanie odpowiedzi na wymuszenie tych elementów nie jest takie proste, nie mówiąc już o obiektach złożonych z tych elementów. W takich przypadkach szukamy zawsze pomocy i inspiracji do rozwiązania problemu w danych eksperymentalnych w znanych już charakterystykach amplitudowo-częstotliwościowych. Z charakterystyk tych (patrz np. rys. 6.1) można wyciągnąć następujące istotne wnioski:



Rys.6.1. Typowe charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe złożonych obiektów mechanicznych (wymuszenie siłą - odbiór przemieszczenia) f_0, f_1 - pierwsze częstotliwości rezonansowe

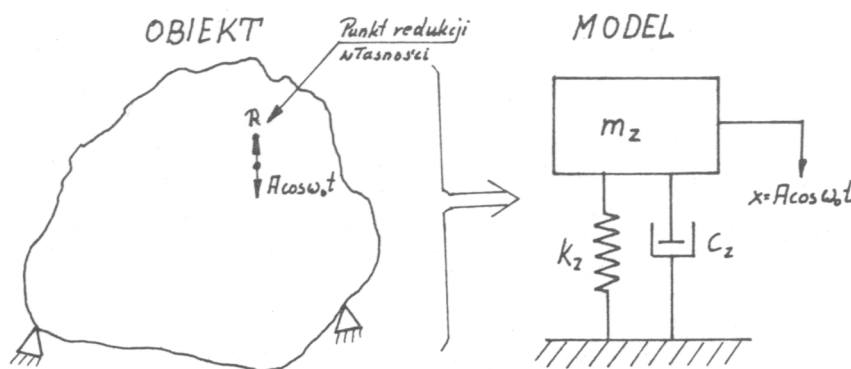
- amplituda drgań wymuszonych maleje wraz ze wzrostem częstotliwości osiągając granicę szumu powyżej kilkuset Hz,
- najwyższymi amplitudami cechują się drgania w pierwszym lub drugim rezonansie obiektu,
- rezonanse obiektu (zwłaszcza pierwsze), są wyraźne, tak że w sąsiedztwie każdego możemy obiekt traktować jako mający jeden stopień swobody.

Tak więc dyssypacja energii i względne separacje rezonansów w dziedzinie niskich częstotliwości pozwalają nam traktować skomplikowany obiekt mechaniczny jako mający jeden istotny stopień swobody (jeden istotny rezonans). Stąd też w wielu przypadkach redukcje obiektu do jednego stopnia swobody, tzn. określenie zastępczych parametrów: c_z - zastępczego tłumienia, k_z - zastępczej sztywności, m_z - zastępczej masy, ω_0 - pierwszej częstotliwości własnej, jest w zupełności wystarczające. Zadanie to można zilustrować graficznie jak na rysunku 6.2, gdzie R jest punktem redukcji własności w obiekcie, drgającym z amplitudą A oraz pierwszą częstotliwością własną ω_0 , którą również należy wyznaczyć.

6.2. OSZACOWANIE ZASTĘPCZEGO TŁUMIENIA OBIEKTU

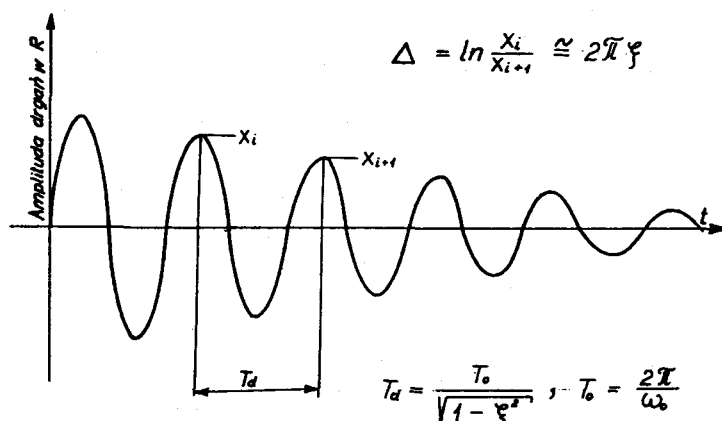
Parametr ten jest niezbędny przy oszacowaniu amplitudy odpowiedzi rezonansowej modelu bądź szybkości zaniku drgań, itp. Do jego wyznaczenia musimy się niestety posłużyć eksperymentem jako punktem wyjścia. Najdogodniejszy będzie tu tzw. test impulsowy polegający na impulsowym (uderzeniowym) wymuszeniu obiektu w punkcie spodziewanego działania wymuszenia i odbiorze odpowiedzi w punkcie redukcji R

Jako wynik uzyskamy obraz drgań zanikających.



Rys.6.2. Idea redukcji własności dynamicznych obiektu mechanicznego w punkcie R do modelu o jednym stopniu swobody

a przy użyciu odpowiednich filtrów górnoprzepustowych możemy odrzucić nieinteresujące nas wyższe częstotliwości własne, otrzymując wynik jak na rysunku 6.3.



Rys.6.3. Filtrowana odpowiedź obiektu w punkcie R na wymuszenie impulsowe jako podstawa do wyznaczenia logarytmicznego dekrementu tłumienia Δ i zastępczego tłumienia c_z

Jak widać z rysunku wynikiem eksperymentu będzie logarytmiczny dekrement tłumienia Δ , bądź stopień tłumienia ξ oraz częstość własna ω_0 , co może nam w przyszłości posłużyć do weryfikacji obliczeń i uzyskanego modelu.

Pamiętając że stopień tłumienia wyraża się przez parametry układu (patrz 3.9) możemy w naszym przypadku napisać:

$$\xi = \frac{c}{c_{kr}} = \frac{c_z}{c_{zkr}} = \frac{c_z}{2 \sqrt{m_z k_z}} \quad (6.1)$$

Tak więc znając z eksperymentu dekrement logarytmiczny Δ oraz z dalszych obliczeń zastępczą masę i sztywność (m_z, k_z), potrafimy wyznaczyć wartość zastępczego tłumienia

c_z w naszym modelu obiektu.

6.3. METODA RAYLEIGH'A, ZASTĘPCZA MASA I SZTYWNOŚĆ

Poprawne przejście od obiektu rzeczywistego do jego modelu wymaga zachowania zasad modelowania. Naczelne zasady w mechanice wypływają z funkcji energii, stąd też żądając podobieństwa zachowania się modelu do obiektu musimy zachować podobieństwo funkcji energii. Muszą więc zachodzić następujące definicje równości:

- energii kinetycznej; $T_{\text{obiekту}} = T_{\text{modelu}}$
- energii potencjalnej; $V_{\text{obiekту}} = V_{\text{modelu}}$ (6.3)
- energii dyssypowanej; $D_{\text{obiekту}} = D_{\text{modelu}}$

W poprzednim punkcie wykorzystaliśmy zasadę o równości energii dyssypowanej w obiekcie i modelu. Mamy wobec tego jeszcze do wykorzystania dwie pierwsze relacje, aby w pełni zrealizować ideę budowy modelu zastępczego z rysunku 6.2.

Obliczmy dla danych modelu z tego rysunku całkowitą energię mechaniczną, czyli tzw. Hamiltonian układu:

$$\begin{aligned} H &= T + V = \frac{1}{2} m_z \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k_z x^2 = \\ &= \frac{1}{2} m_z \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t + \frac{1}{2} k_z A^2 \cos^2 \omega_0 t . \end{aligned} \quad (6.4)$$

Z mechaniki wiadomo, że dla układu zachowawczego $H = \text{const}$, w związku z czym pochodna po czasie (6.4) będzie zerowa:

$$\frac{dH}{dt} = \left(\frac{1}{2} m_z \omega_0^2 A^2 - \frac{1}{2} k_z A^2 \right) 2 \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t = 0 .$$

Kładąc żądanie zerowania pochodnej dla wszystkich t mamy:

$$\frac{1}{2} m_z \omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2} k_z A^2 . \quad (6.5)$$

W świetle naszych oznaczeń:

$$T = \frac{1}{2} m_z \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t = \omega_0^2 T'_{\text{max}} \sin^2 \omega_0 t ,$$

$$V = \frac{1}{2} k_z A^2 \cos^2 \omega_0 t = V_{\max} \cos^2 \omega_0 t ,$$

gdzie V_{\max} jest amplitudą energii potencjalnej zaś T_{\max} energii kinetycznej bez kwadratu częstości własnej ω_0 . W takim ujęciu równość (6.5) można wyrazić:

$$\omega_0^2 T_{\max} = V_{\max} ,$$

czyli ostatecznie otrzymamy iloraz Rayleigha [16,18,19,26,27]:

$$\omega_0^2 = \frac{V_{\max}}{T_{\max}} = \frac{V_{\max} \text{ obiektu}}{T_{\max} \text{ obiektu}} , \quad (6.6)$$

który daje metodę oszacowania najniższej częstości własnej obiektu mechanicznego, jeśli z prawej strony podstawić funkcje energii obiektu zgodnie z zasadą modelowania (6.3).

Jak dowiedzieliśmy się z badania drgań układów o dwu i wielu stopniach swobody (rozdział 5) układy te mają swe postaci drgań charakterystycznych dla każdej częstości drgań własnych. Zachodzi więc pytanie, jak wybrać postać drgań przy obliczaniu energii (6.6), by otrzymać najlepsze oszacowanie częstości własnej. Otóż zgodnie z metodą Rayleigh'a postać drgań musi być zawsze zgodna z warunkami brzegowymi obiektu a dla oszacowania najniższej częstości własnej dogodnie jest przyjąć postać własną jako deformację pod wpływem obciążenia własnego. Może to być np. ugięcie statyczne, pręta, belki, płyty itp. Wyrażenia na energie tych elementarnych układów rozciągłych przedstawimy w następującym punkcie, tutaj zaś zajmiemy się dalej obliczeniem parametrów zastępczych modelu z rysunku 6.2.

Popatrzmy jeszcze raz na zasady modelowania (6.3) w świetle znanych postaci wyrażen na energie, a zwłaszcza ich amplitud V_{\max} T_{\max} . Wykorzystując to mamy:

$$\frac{1}{2} k_z A^2 = V_{\max} \text{ obiektu} ,$$

$$\frac{1}{2} m_z A^2 = T_{\max} \text{ obiektu} .$$

W takim razie parametry zastępcze modelu łącznie z jego częstotliwością własną (6.6) można wyrazić w postaci:

$$\begin{aligned} k_z &= \frac{2 V_{\max} \text{ obiektu}}{A^2} , \\ m_z &= \frac{2 T_{\max} \text{ obiektu}}{A^2} , \\ \omega_0^2 &= \frac{V_{\max} \text{ obiektu}}{T_{\max} \text{ obiektu}} . \end{aligned} \quad (6.7)$$

Tak więc parametry modelu m_z , k_z redukowane są do punktu R (patrz rys.6.2; z jego amplitudą drgań A, natomiast częstość drgań własnych jest własnością wspólną dla całego obiektu. Znając obecnie wyrażenia na energie (T,V), obiektu lub jego modelu rozciąglego możemy obliczyć częstość drgań oraz sztywność, masę i tłumienie zastępcze modelu.

Na zakończenie tego punktu dwa słowa o dokładności obliczeń; otóż jest ona tym większa im lepiej potrafimy przybliżyć rzeczywisty kształt deformacji dynamicznej układu przy pierwszej częstotliwości własnej. Niemniej jednak można wykazać [27], że otrzymany wynik jest zawsze zawyżony, tzn. że $\omega_0^2 > \omega_0^2$ rzeczywistej. Ta nadwyżka jest zwykle rzędu kilku do kilkunastu procent.

6.4. ENERGIA DRGAŃ PROSTYCH MODELI ROZCIĄGŁYCH

Mając na uwadze ogólny typ obiektu mechanicznego z rysunku 6.2 możemy jedynie napisać następujące wyrażenie na amplitudy energii

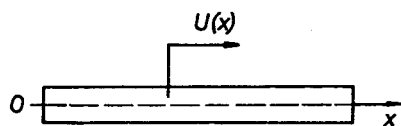
$$T_{\max} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(x,y,z) v^2(x,y,z) dx dy dz , \tag{6.8}$$

$$V_{\max} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\epsilon_x \sigma_x + \epsilon_y \sigma_y + \epsilon_z \sigma_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{zy} \gamma_{zy}) dx dy dz ,$$

gdzie $\rho(x,y,z)$ to gęstość masy, $v(x,y,z)$ - amplituda prędkości drgań bez ω_0^2 , Ω - obszar określoności obiektu, ϵ_i, σ_i - odkształcenia liniowe i naprężenia normalne, τ_{ij}, γ_{ij} - naprężenia styczne i odkształcenia kątowe. Są to oczywiście części amplitudalne tych wielkości bez części czasowej typu $\sin \omega_0 t$ bądź $\cos \omega_0 t$.

Jeśli weźmiemy pod uwagę elementarne modele układów rozciągłych, to wyrażenia (6.8) przyjmą bardziej konkretną postać,

1° Dla pryzmatycznego pręta drgającego podłużnie:



dane: ρ, F, l, E

$U(x)$ - amplituda deformacji dynamicznej

ρ - gęstość masy

F - przekrój poprzeczny

l - długość

E - moduł Younga

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l \rho F U^2 dx, \quad V_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l E F (U')^2 dx, \tag{6.9}$$

$$U = U(x), \quad U' = \frac{dU}{dx} ,$$

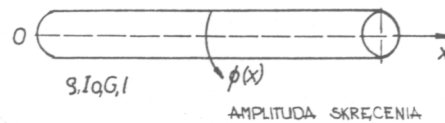
siła podłużna:

$$N(x) = E F U'(x) .$$

2° Dla pręta o przekroju kołowym drgającego skrętnie:

I_0 - biegunowy moment bezwładności przekroju poprzecznego,

G - moduł Kirchhoffa



$$T'_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l \rho I_0 \dot{\phi}^2 dx,$$

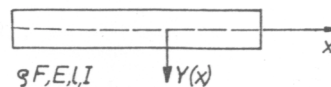
$$V_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l G I_0 (\phi')^2 dx, \quad \phi = \phi(x), \quad \phi' = \frac{d\phi}{dx}. \quad (6.10)$$

Moment skręcający:

$$M_s(x) = G I_0 \phi'(x).$$

3° Dla belek pryzmatycznych drgających giętnie:

I - moment bezwładności przekroju względem osi obojętnej.



$$T'_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l \rho F \dot{Y}^2 dx, \quad V_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l E I [Y''(x)]^2 dx,$$

$$Y = Y(x), \quad Y'' = \frac{d^2 Y}{dx^2}. \quad (6.11)$$

Moment zginający:

$$M_g(x) = E I Y''(x).$$

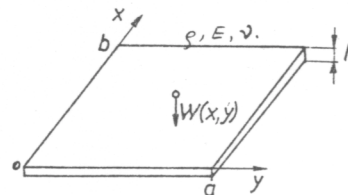
4° Dla płyty zginanej:

$W(x, y)$ - ugięcie płyty

h - wysokość

ν - moduł Poissona

$$T'_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \rho h \dot{W}^2 dx dy, \quad (5.12)$$

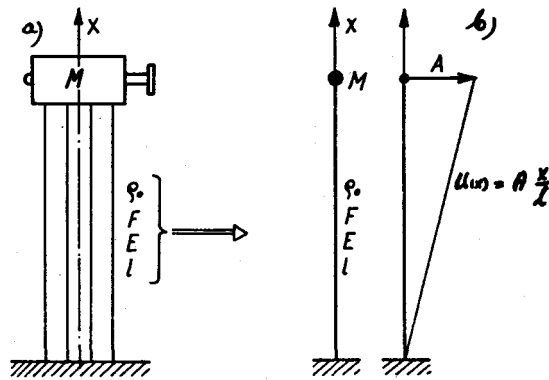


$$V_{\max} = \frac{E h^3}{24(1-\nu^2)} \int_0^a \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy.$$

Jak się wydaje, ten zapas wiedzy o wyrażeniach energii układów rozciągniętych jest do naszych celów wystarczający. Wypada tu jedynie przypomnieć, że $U(x)$, $\phi(x)$, $Y(x)$, $W(x, y)$, to amplitudy deformacji dynamicznych, które zgodnie z metodą Rayleigh'a winny spełniać warunki brzegowe, a dla oszacowania pierwszej częstości własnej obiektu można je przybliżać zgodnie z deformacjami pod obciążeniem własnym.

W przypadku skomplikowanej postaci deformacji pod obciążeniem własnym postać drgań obiektu można przybliżać postacią drgań obiektu prostszego - podobnego.

Przykład. Silnik wyciągarki o masie M zamontowany jest na słupie jednorodnym o parametrach ρ_0, F, L, E . Przyjmując punkt redukcji na szczycie słupa znaleźć parametry zastępcze m_z, k_z oraz częstość drgań własnych z zamiarem skonfrontowania jej z obrotami silnika.



Rys.6.4. Silnik wyciągarki na słupie i jego model (a) oraz deformacja wzdłużna do obliczeń metodą Rayleigh'a (b)

Deformacja styczna słupa pod ciężarem $P = Mg$ będzie $U(x) = A \frac{x}{l}$, zaś rozkład masy najlepiej wyrazić za pomocą dystrybucji Dirac'a $\varphi(x) = \varphi_0 F + M \delta(x - l)$ [wymiar fizyczny $[\delta(x)] = \frac{1}{[x]}$, działanie $\int_0^a \delta(x) \delta(x-l) dx = \delta(l)$, jeśli $l \in (0, a)$]. Uwzględniając więc wzory (6.9) i (6.7) mamy:

$$T_{\max}' = \frac{1}{2} \int_0^l [\varphi_0 F + M \delta(x-l)] \frac{A^2 x^2}{l^2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} \varphi_0 F l + M \right] A^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{m_p}{3} + M \right] A^2, \quad m_p = \varphi_0 F l - \text{masa pręta.}$$

$$V_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l E F \frac{A^2}{l^2} dx = \frac{1}{2} A^2 \frac{E F}{l} = \frac{1}{2} A^2 k_s,$$

$$k_s = \frac{E F}{l} - \text{szywność statyczna pręta na ściskanie.}$$

Tak więc:

$$m_z = \frac{1}{3} m_p + M,$$

$$k_z = k_s = \frac{E F}{l},$$

$$\omega_0^2 = \frac{E F}{l \left(\frac{1}{3} m_p + M \right)}.$$

Zatem w powyższym ujęciu sztywność pręta się nie zmienia $k_z = k_s$, lecz obliczając masę zastępczą

Ten sam wynik obowiązuje w obliczeniach dynamicznych sprężyn, (np. zaworowych), gdzie przy wysokich częstotliwościach zachodzi konieczność uwzględnienia masy sprężyny.

6.5. UKŁADY ZŁOŻONE, METODA DUNKERLEY - SOUTWELL'A

W wielu przypadkach zastosować mamy do czynienia z układami złożonymi z wielu elementów inercyjnych lub/i sztywnościowych, których kompozycja tworzy jeden układ drgający. Podanie bądź określenie przestrzennego sposobu drgań (postaci), nawet w sposób przybliżony do zastosowania metody Rayleigh'a, nie jest proste. Znacznie prostsze jest jednak podanie sposobu drgań (postaci) poszczególnych subelementów, gdyż nasza wiedza o małych układach izolowanych jest daleko więcej precyzyjna. Na tej zasadzie oparte jest rozszerzenie metody Rayleigh'a podane przez Dunkerley'a dla układów będących kompozycją łatwych do oddzielenia elementów inercyjnych [27, 28, 29] oraz Southwell'a dla układów będących kompozycją elementów sprężystych [27, 28, 29].

Jako pierwszy rozważmy przypadek układu złożonego z kompozycji elementów sprężystych łatwych do wydzielenia, tak że energia sprężysta całego układu da się wyrazić jako suma energii izolowanych podukładów. Tak więc zakładamy, że

$$V_{\max} = P = \sum_{i=1}^n P_i ,$$

$$T_{\max} = K ,$$

to znaczy, że energia sprężysta jest separowalna natomiast kinetyczna określona jednym wyrażeniem.

Uwzględniając powyższe założenie w formule Reyleigh'a (6.6) otrzymamy:

$$\omega_0^2 = \frac{V_{\max}}{T_{\max}} = \frac{P}{K} = \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{K} = \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{K} = \sum_{i=1}^n \omega_i^2 . \quad (6.14)$$

Do tej pory, jak łatwo zauważyć z powyższego, formuła Rayleigh'a była jedynie formalnie przekształcona, a wprowadzone oznaczenie:

$$\frac{P_i}{K} = \omega_i^2 \quad (6.15)$$

oznacza fikcyjną częstość drgań i-tego podukładu liczoną przy uwzględnieniu deformacji całego układu.

Ale na początku tego rozdziału stwierdziliśmy, że nasza wiedza o odkształceniach izolowanego układu jest dokładniejsza. Podstawmy więc do (6.15) zamiast odkształceń całego układu odkształcenia i-tego podukładu izolowanego:

$$\left(\frac{P_i}{K}\right)_1 = \omega_{0i}^2 . \quad (6.16)$$

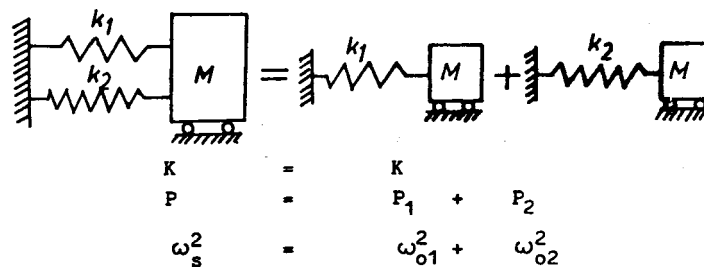
Jeśli takie podejście uwzględnimy w przekształconym wzorze (6.14), to pisząc zamiast ω_0^2, ω_s^2 (Soutwell) otrzymamy:

$$\omega_s^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{P_i}{K} \right)_i = \sum_{i=1}^n \omega_{o1}^2 \quad (6.17)$$

Jest to właśnie formuła Southwell'a wyliczenia częstości własnej układu złożonego na podstawie znajomości częstości własnych układów izolowanych. Otrzymany w ten sposób wynik jest zawsze zaniżony w stosunku do rzeczywistej częstości własnej układu (w rzadkich przypadkach równy).

Przykłady zastosowań

Przykład 1. (Obrazujący jedynie ideę izolacji podukładów). Masa M podparta jest na dwu sprężynach k_1 i k_2 . Znaleźć częstość własną układu. Zasadę dekompozycji układu przedstawiono niżej.



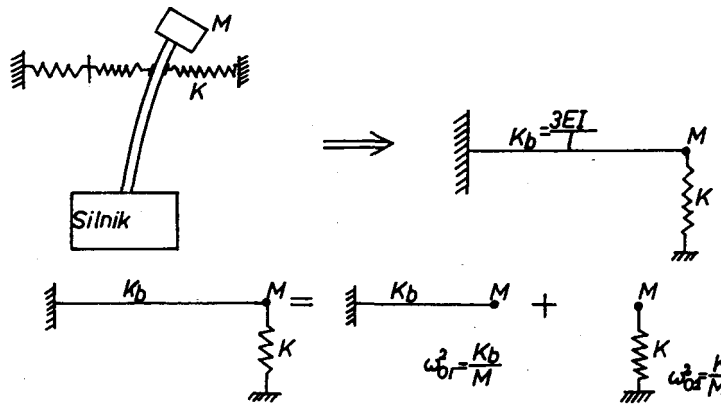
Ponieważ:

$$\omega_{o1}^2 = \frac{k_1}{M}, \quad \omega_{o2}^2 = \frac{k_2}{M},$$

to $\omega_s^2 = \frac{k_1 + k_2}{M}$ i jak widać uzyskaliśmy wynik dokładny, gdyż przy równoległym połączeniu sprężyn ich współczynniki się sumują.

Przykład 2. Nieco podobny, lecz bardziej bliski rzeczywistości. Masa i moment bezwładności silnika napędowego młynka jest znacznie większa od masy głowicy roboczej o masie M zamontowanej na końcu wału wspornikowego. Oprócz tego głowica podparta jest w elastycznych łożyskach o sztywności radialnej k .

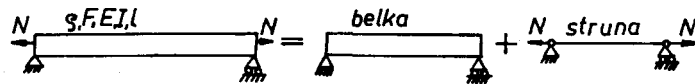
Znaleźć częstość własną układu. Modelowanie i dekompozycje układu przedstawiono niżej.



W takim razie:

$$\omega_s^2 = \omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 = \frac{3EI}{l^3 M} + \frac{k}{M} = \frac{k}{M} \left(1 + \frac{3EI}{k l^3} \right).$$

Przykład 3. Znaleźć częstość własną belki podpartej obustronnie i rozciąganej siłą \$N\$. Układ rozkładamy na belkę drgającą giętnie bez naciągu oraz strunę o tej samej masie z nacięciem \$N\$ (struna nie posiada sztywności na zginanie) jak niżej.



$$\omega_s^2 = \omega_{01}^2 + \omega_{02}^2$$

wiadomo że dla belki [np. 26] $\omega_{01}^2 = \frac{\pi^4}{l^4} \frac{EI}{\rho F}$, zaś dla struny $\omega_{02}^2 = \frac{\pi^2}{l^2} \frac{N}{\rho F}$,

tak więc:

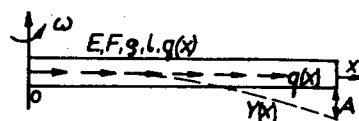
$$\omega_s^2 = \frac{\pi^2}{l^2} \frac{\rho F}{\rho F} \left(N + \frac{\pi^2}{l^2} EI \right).$$

Przykład 4. Łopatkę wirnika turbiny, śmigła samolotu lub helikoptera można zmodelować jako belkę wspornikową poddaną zmiennemu na przelocie działaniu siły odśrodkowej.

W ślad za Panowką [28] podamy ideę rozwiązania zgodnie z metodą Rayleigh'a oraz Southwell'a.

Metoda Rayleigh'a

$q(x)$ - intensywność sił rozciągających.



Energia potencjalna belki zginanej i rozciąganej wynosi:

$$V_{\max} = P = \frac{1}{2} \int_0^l [EI(Y'')^2 + N(x) (Y')^2] dx ,$$

$$N(x) = \int_x^l q(x) dx .$$

Dla sił rozciągających odśrodkowych $q(x) = \rho F \omega^2 x$, stąd:

$$N(x) = \rho \frac{F \omega^2}{2} (l^2 - x^2) .$$

W takim razie:

$$P = \frac{1}{2} \int_0^l [EI(Y'')^2 + \rho \frac{F \omega^2}{2} (l^2 - x^2) (Y')^2] dx .$$

Energia kinetyczna pochodzi tylko od ruchu poprzecznego elementów belki, stąd:

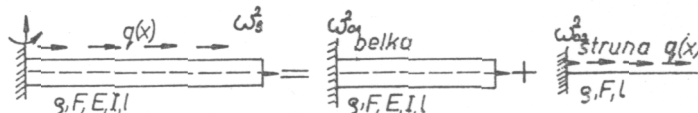
$$K = \frac{1}{2} \int_0^l \rho F Y^2 dx$$

oraz częstość własna wg wzoru Rayleigh'a:

$$\omega_0^2 = \frac{\int_0^l [EI(Y'')^2 + \rho \frac{F \omega^2}{2} (l^2 - x^2) (Y')^2] dx}{\int_0^l \rho F Y^2 dx} .$$

Przyjmując odpowiednią linię ugięcia łopatki np. $Y(x) = A \frac{x^2}{l^2}$ oraz dane dla E, ρ, D, l możemy znaleźć wartość liczbową częstości drgań ω_0^2 .

Metoda Southwella'a



Częstość izolowanego układu pierwszego ω_{01} to pierwszy człon w obliczonym uprzednio ilorazie Rayleigh'a:

$$\omega_{01}^2 = \frac{\int_0^l EI(Y'')^2 dx}{\int_0^l \rho F Y^2 dx} .$$

Podukład drugi to struna o naciągu zmiennym na jej przelocie. Nie możemy więc wykorzystać wzoru z przykładu 3. Możemy jedynie obliczyć parcjalaną częstość własną tego podukładu metodą Rayleigh'a. Częstość tę przedstawia drugi człon poprzedniego wyrażenia na ω_0^2 . Jest więc jedynie kwestia linii deformacji struny, a nie ugięcia belki jak wyżej. Oznaczając deformację struny przez U będziemy mieli:

$$\omega_{o2}^2 = \frac{\int_0^l N(x) (U')^2 dx}{\int_0^l \rho F U^2 dx} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^l \rho F \omega^2 (1^2 - x^2) (U')^2 dx}{\int_0^l \rho F U^2 dx} .$$

Biorąc pod uwagę najprostszą linię deformacji struny:

$$U(x) = A \frac{x}{l} .$$

Po obliczeniach znajdziemy:

$$\omega_{o2}^2 = \frac{\frac{1}{2} \int_0^l \omega^2 (1^2 - x^2) \frac{A^2}{l^2} dx}{\int_0^l \frac{A^2 x^2}{l^2} dx} = \omega^2 .$$

Tak więc częstość własna belki wirującej z prędkością kątową obliczona wg metody Southwell'a

wynosi:

$$\omega_s^2 = \omega_{o1}^2 + \omega^2 .$$

Jest to częstość belki będącej w spoczynku powiększona o częstość wirowania. Warto sprawdzić z wyprowadzonego poprzednio wzoru Rayleigh'a, że w tym przypadku wynik na ω_0^2 będzie wyższy

$$(\omega_0^2 > \omega_s^2)$$

Poprzestając na powyższych przykładach układów złożonych separowanych wg energii sprężystej weźmy pod uwagę sytuację przeciwną; jednoczłonowego wyrażenia na energię sprężystą i separowalną na części energię kinetyczną związaną z inercją. Tak więc zakładamy, że:

$$V_{\max} = P, \quad (6.18)$$

$$T_{\max}^* = K = \sum_{i=1}^n K_i.$$

Biorąc znowu pod uwagę formułę Rayleigh'a (6.6) otrzymamy formalnie:

$$\omega_0^2 = \frac{V_{\max}}{T_{\max}^*} = \frac{P}{\sum_{i=1}^n K_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{K_i}{P}}, \quad (6.19)$$

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{P} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{P}{K_i}\right)^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_{0i}^2}.$$

Podobnie jak poprzednio częstości ω_1 są częstościami własnymi fikcyjnych podukładów inercyjnych, na jakie można rozbić układ wyjściowy, liczone z ogólnej deformacji tego układu. Jeśli teraz weźmiemy deformacje subukładów, które jesteśmy w stanie określić znacznie dokładniej niż dla całego układu, to zamiast częstości ω_i musimy napisać ω_{0i} a zamiast ω_0^2 Rayleigh'a oszacowanie Dunkerley'a ω_D^2 .

Tak więc jeśli policzymy częstości cząstkowe z deformacji układów cząstkowych, tzn.:

$$\left(\frac{P}{K_i}\right)_i = \omega_{0i}^2,$$

to ostatecznie z (6.19) uzyskamy oszacowanie Dunkerley'a [27, 28, 29]:

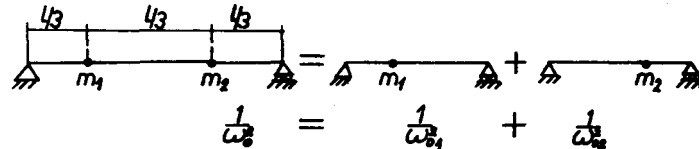
$$\boxed{\frac{1}{\omega_D^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{P}{K_i}\right)_i^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_{0i}^2}.} \quad (6.20)$$

Oznacza to, że odwrotność kwadratu częstości własnej układu złożonego separowalnego inercyjnie jest równa sumie odwrotności kwadratów częstości własnych fikcyjnych podukładów liczonych na swych własnych deformacjach. Ten uproszczony sposób obliczeń układów złożonych nosi nazwę metody Dunkerley'a i podobnie jak w metodzie Southwell'a daje wyniki zaniżone w porównaniu do rzeczywistej częstości własnej obiektu.

Przykłady zastosowań

Przykład 1. Na drążonym wale silnika lotniczego zamontowane są wirnik turbiny o masie m_1 i sprężarki o masie m_2 . Znaleźć pierwszą częstość drgań giętnych wału. Uznając drążony wał jako nieważki w porównaniu z masami wirników możemy przyjąć model nieważkiej belki podpartej obustronnie i obciążonej masami.

Dekompozycję modelu przedstawiono niżej.



Częstości parcjalne można znaleźć za pomocą wzorów podanych w załączniku.

Zatem:

$$\omega_{o1}^2 = \frac{243 EI}{4 l^3 m_1}, \quad \omega_{o2}^2 = \frac{243 EI}{4 l^3 m_2},$$
$$\omega_D^2 = \frac{243 EI}{4 l^3 (m_1 + m_2)}.$$

Przykład ten możemy jeszcze inaczej rozwiązać, jeśli zmierzymy lub obliczymy ugięcia statyczne Δ_{11}, Δ_{22} belki pod ciężarem m_{1g} oraz m_{2g} oddzielnie. Wtedy według znanego wzoru Geigera mamy:

$$\omega_{o1} = \sqrt{\frac{E}{\Delta_{11}}}, \quad \omega_{o2} = \sqrt{\frac{E}{\Delta_{22}}}.$$

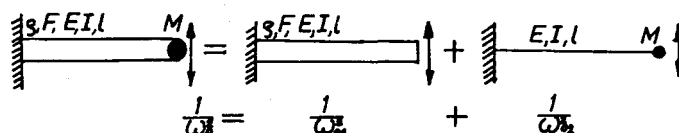
Tak więc ostatecznie:

$$\omega_D = \sqrt{\frac{E}{\Delta_{11} + \Delta_{22}}}.$$

To podejście może być rozciągnięte na belki wieloprzęsłowe obciążone wieloma masami (wały z wieloma wirnikami).

Przykład 2. Silnik wyciągarki zamontowano na końcu belki wspornikowej. Znaleźć częstość własną układu bez obciążenia. Dane belki: ρ, F, E, I, l , masa silnika M .

Dekompozycja układu przedstawiona jest niżej.



Częstość własna masowej belki wspornikowej wynosi [26]:

$$\omega_{01}^2 = \left(\frac{1,87}{l}\right)^4 \frac{EI}{\rho F},$$

zaś nieważkiej z masą na końcu (patrz dodatek) będzie:

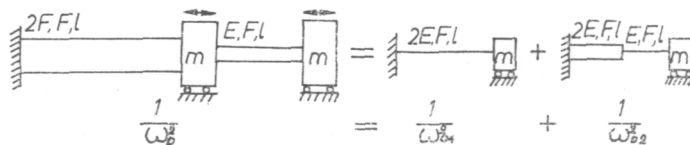
$$\omega_{02}^2 = \frac{3EI}{l^3 M}.$$

Tak więc ostatecznie oszacowanie Dunkerley'a będzie:

$$\omega_D^2 = \frac{3EI}{l^3(M + 0,245 \rho Fl)}$$

Przykład 3. Element maszynowy drgający podłużnie można zmodelować jako szeregowy układ

dwu masy połączone prętami o długości l i sztywności $2EF$ oraz EF . Oszacować jego pierwszą częstość własną. Szkic układu i jego dekompozycję przedstawiono niżej.



Wiemy, że pierwszy podukład ma sztywność $\frac{2EF}{l}$ i wynikającą stąd częstość $\omega_{01}^2 = \frac{2EF}{ml}$.

Drugi podukład jako połączenie szeregowe dwu prętów $\omega_{01}^2 = \frac{2EF}{3l}$ oraz wynikającą stąd częstość

$\omega_{02}^2 = \frac{2EF}{3ml}$. W takim razie oszacowanie Dunkerley'a będzie :

$$\frac{1}{\omega_D^2} = \frac{ml}{2EF} + \frac{3ml}{2EF} = \frac{2ml}{EF}$$

Stąd:

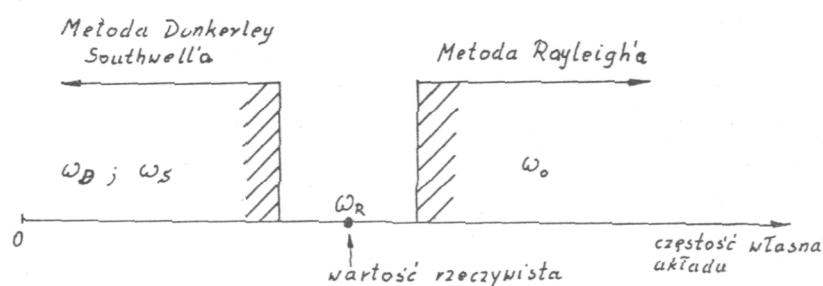
$$\omega_D^2 = \frac{0,5 EF}{ml}, \quad \omega_D \approx 0,7 \sqrt{\frac{EF}{ml}}.$$

Jest przy tym oczywiste, że ten sposób rozumowania można rozciągnąć na podobne układy wielomasowe.

6.6.DOKŁADNOŚĆ METOD PRZYBLIŻONYCH

Wyżej poznaliśmy dwie metody przybliżone szacowania częstości drgań oraz parametrów zastępczych rzeczywistych obiektów mechanicznych. Metody te korzeniami tkwią w zasadzie zachowania energii mechanicznej; wprost metoda Rayleigh'a i jej rozwinięcie na układy złożone separowalne, zgodnie z metodą Southwell'a - Dunkerley'a.

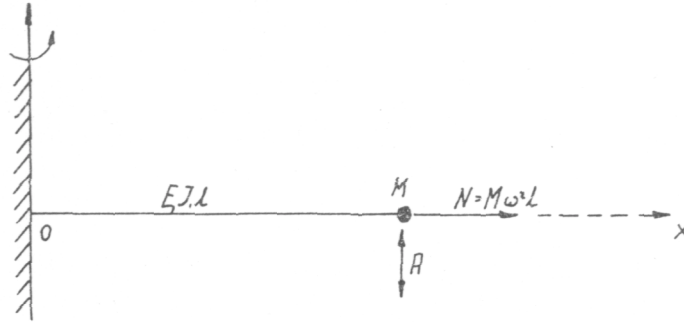
Metody te jako elementy wyjściowe biorą wyrażenia na amplitudę energii potencjalnej P i kinetycznej K rozpatrywanego układu złożonego. Obie energie zależą wprost od postaci drgań, np. $U(x)$, lub jej pochodnych. Tej postaci drgań nigdy nie znamy dokładnie, stąd też Rayleigh zaleca przyjmować jako postać drgań deformację pod obciążeniem własnym, bądź w przypadkach skrajnych każdą inną funkcję spełniającą warunki brzegowe obiektu. Jest przy tym oczywiste, że im większe odstępstwo od rzeczywistej deformacji dynamicznej, tym większy błąd w obliczeniu częstości własnej. Ta trudność w określeniu rzeczywistej deformacji układów złożonych jest źródłem metody Dunkerley'a - Southwell'a, gdzie deformacje układu zastępuje się deformacjami subelementów wynikających z dekompozycji układu wyjściowego. Są to jak widać dwa odmienne podejścia, które dają inny rodzaj oszacowania rzeczywistej częstości własnej. Można pokazać [27,26,29], że metoda Rayleigh'a szacuje częstość własną od góry natomiast sposób Dunkerley-Southwell'a od dołu, tak jak na rysunku 6.5.



Rys.6.5. Ilustracja sposobu szacowania rzeczywistej częstości układu mechanicznego za pomocą metod przybliżonych

Dla ilustracji tych istotnych własności metod przybliżonych rozważymy poniższy przykład.

Przykład. Łopata śmigła helikoptera z silnikiem odrzutowym na końcu może być zmodelowana jako nieważka belka z masą M na końcu, rozciągana siłami odśrodkowymi. Obliczyć jej częstość własną metodą Southwella i Rayleigh'a [28].



Rys.6.6. Model łopaty helikoptera z silnikiem na końcu

Przypomnijmy sobie, że problem podobny rozważaliśmy jako ilustrację metody Southwella w przykładzie 4 dla belki masowej. Uzyskany tam wynik dla produkładu struny jest słuszny również w tym przypadku. Wynosi on:

$$\omega_s^2 = \frac{3 EI}{M l^2} + \omega^2 .$$

Zgodnie z metodą Rayleigh'a częstość własną obliczymy z wzoru

$$\omega_0^2 = \frac{\int_0^l EI (Y'')^2 dx + \int_0^l N (Y')^2 dx}{M Y^2(1)} .$$

Przyjmując linie ugięcia łopaty w postaci:

$$Y = A \left[\frac{3}{2} \left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]$$

i całkując kolejno otrzymamy:

$$\int_0^l EI (Y'')^2 dx = \frac{3 EI A^2}{l^3} ,$$

$$\int_0^l N (Y')^2 dx = M \omega^2 l \int_0^l (Y')^2 dx = \frac{6}{5} M \omega^2 A^2 .$$

Wobec tego:

$$\omega_0^2 = \frac{3 EI}{M l^3} + 1,2 \omega^2 .$$

W takim razie rzeczywista częstość własna łopaty z silnikiem ω_R zawarta jest w granicach:

$$\frac{3 EI}{M l^3} + \omega^2 < \omega_R^2 < \frac{3 EI}{M l^3} + 1,2 \omega^2 .$$

Tym przykładem zilustrowaliśmy dostatecznie, jak się wydaje, siłę wnioskowania energetycznych metod przybliżonych. Jak stąd widać, ich dokładność będzie w wielu przypadkach zupełnie wystarczająca do celów zastosowań inżynierskich. Jeśli zaś wymagane są wyniki dokładniejsze, to w przytoczonej tu literaturze można znaleźć całą gamę metod bardziej dokładnych ale i bardziej kłopotliwych i wymagających zaawansowanych technik i środków obliczeniowych.