

4.DRGANIA WYMUSZONE MODELU O JSS

Poznaliśmy już najważniejsze cechy swobodnego zachowania się modelu o jednym stopniu swobody, a także wyciągnęliśmy przesłanki techniczne wynikające z analizy drgań swobodnych. Przyczyna ruchu modelu wynikała tu z zadanych warunków początkowych. Znacznie jednak częściej ruch obiektu, a zatem i naszego modelu, jest odpowiedzią na zewnętrznie zadane wymuszenie siłowe, momentowe bądź kinematyczne. Stąd też pora przejść do analizy możliwych ruchów wymuszonych modelu o JSS. Zanim jednak do tego przejdziemy trzeba przemyśleć możliwe rodzaje wymuszeń w technice i nadać im prostą postać modelową.

4.1. MODELE WYMUSZEŃ

Z racji naszych zainteresowań drganiami będziemy mówić oczywiście o wymuszeniach dynamicznych. Wiedząc zaś, że z punktu widzenia równań ruchu modelu i ich rozwiązań nie jest konieczne odróżnianie wymuszenia kinematycznego siłowego bądź momentowego skupimy naszą uwagę jedynie na charakterze czasowym wymuszenia dynamicznego. Generalny podział wymuszeń przedstawiony jest na rysunku 4.1, w ślad za [14] z niewielkimi zmianami.

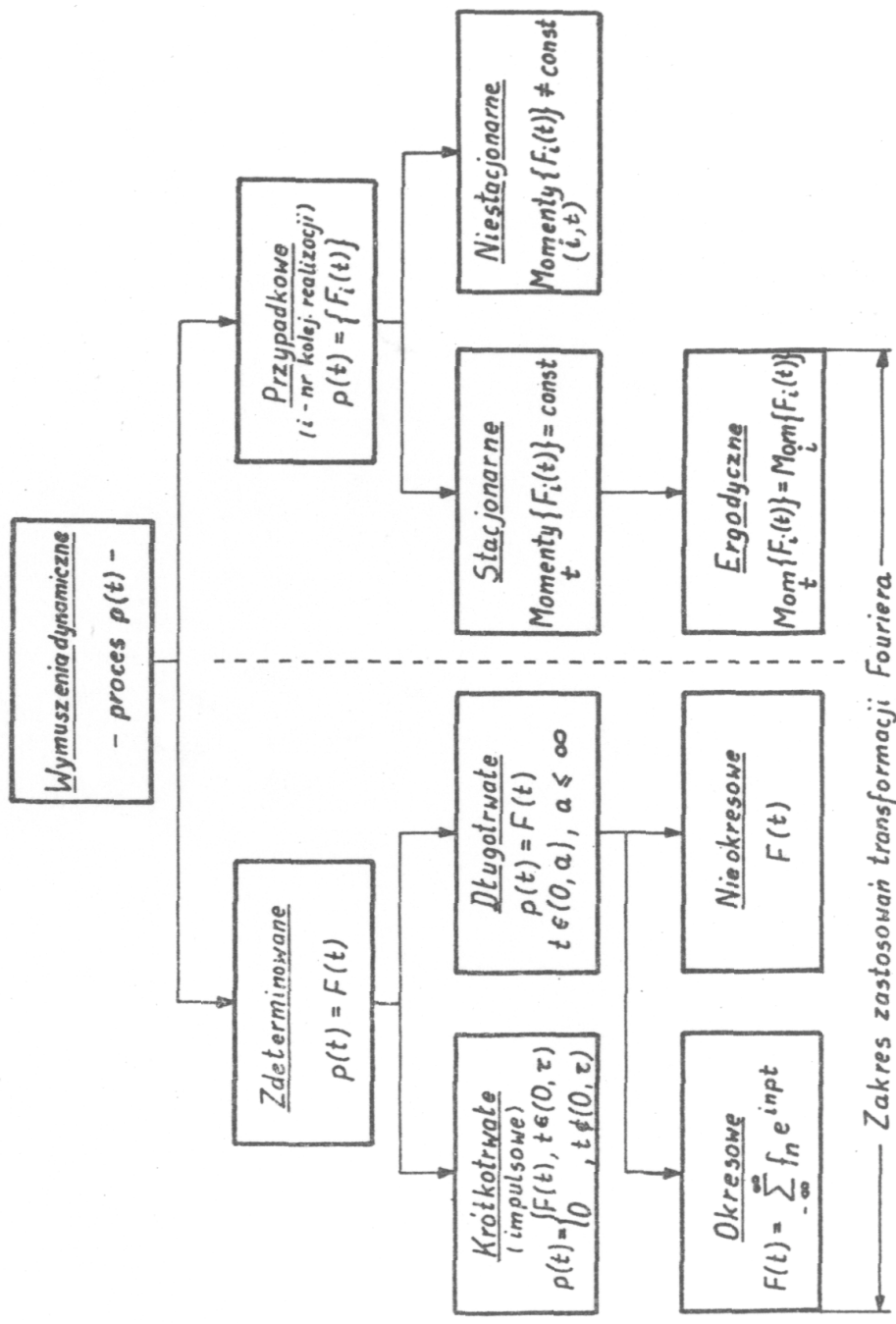
Jak widać z rysunku wymuszenia zdeterminowane nie wymagają istotnych wyjaśnień pojęciowych, gdyż tutaj zawsze mamy podany przepis uzyskania wartości wymuszenia dla danego czasu t , gdyż znamy funkcję $F(t)$. Natomiast proces (wymuszenie) przypadkowy bazuje na pojęciu realizacji (np. kolejny podmuch wiatru) i w skrajnym przypadku jedna realizacja może być niepodobna do drugiej. Jednak w zastosowaniach technicznych wymuszenia przypadkowe są na ogół stacjonarne, co oznacza, że ich charakterystyki czasowe są niezmiennicze.

Do najważniejszych charakterystyk należą tu wartości średnie \bar{F} oraz amplituda średniokwadratowa F_{RMS} , zdefiniowane dla i -tej realizacji następująco (RMS = root mean square - pierwiastek ze średniego kwadratu):

$$\bar{F}_i \equiv \frac{1}{T} \int_0^T F_i(t) dt, \quad (4.1)$$

$$\overline{F_i^2} = \frac{1}{T} \int_0^T F_i^2(t) dt, \quad F_{RMS} = \sqrt{\overline{F_i^2}}.$$

Stacjonarność zaś oznacza: $\bar{F} = \text{const}$, $\overline{F^2} = \text{const}$.



Rys.4.1. Klasyfikacja wymuszeń dynamicznych jako funkcji czasu, [14]

Jeśli teraz wartość średnią i średniokwadratową będziemy liczyć na dziedzinie realizacji zamiast czasu, to dla każdej j-tej chwili czasu mamy:

$$\langle F \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_1(t_j) , \quad (4.2)$$

$$\langle F^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_1^2(t_j) .$$

Ergodyczność wymuszenia oznacza teraz, że

$$\bar{F}_1 = \langle F \rangle \quad \text{oraz} \quad \bar{F}_1^2 = \langle F^2 \rangle , \quad (4.3)$$

co daje, że obliczanie charakterystyk po zbiorze realizacji możemy zastąpić obliczeniem wzdłuż jednej realizacji. W umyśle czytelnika może powstać pytanie czy rozpatrując elementarne zagadnienia drgań jest potrzeba rozwodzić się o procesach przypadkowych? Otóż jeśli weźmiemy drgania maszyn w zakresie częstotliwości wyższych niż obrotowe (hałas, diagnostyka), to konieczność uwzględnienia charakteru przypadkowego wymuszenia jest oczywista. W zagadnieniach dynamiki urządzeń specjalnych, np. obciążenie pługa przy orce itp., jest oczywista konieczność losowego traktowania obciążeń w całym zakresie częstotliwości. Wiedząc o tym przejdźmy obecnie do określenia odpowiedzi modelu na wymuszenie zdeterminowane.

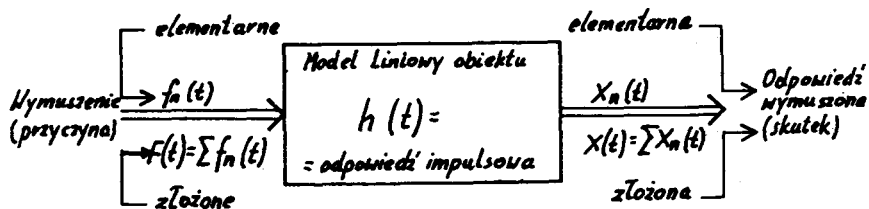
4.2. ODPOWIEŹ MODELU (UKŁADU) NA WYMUSZENIE ZDETERMINOWANE

Omawiając modelowanie obiektów mechanicznych zaznaczyliśmy, że nasze modele (układy dynamiczne) są liniowe, stacjonarne, zdeterminowane. Własność liniowości pozwala na skorzystanie z zasady superpozycji przyczyn i skutków, która to zasada oddaje nieocenione usługi w analizie drgań wymuszonych. Zasadę tę można określić następująco: jeśli wymuszenie działające na układ (model) da się rozłożyć na szereg wymuszeń elementarnych, $F(t) = \sum f_n(t)$, to odpowiedź układu liniowego jest sumą odpowiedzi na poszczególne wymuszenia elementarne. Ilustracja tej zasady przedstawiona jest na rysunku 4.2.

Odpowiedź wymuszona każdego układu dynamicznego jest złożona z dwu składników: z odpowiedzi swobodnej, $x_{sw}(t)$, która zanika z upływem czasu oraz ze stacjonarnej odpowiedzi wymuszonej $x_{wym}(t)$, czyli:

$$x_{\text{całk wym}}(t) = x_{sw}(t) + x_{wym}(t) , \quad (4.4)$$

$$x_{sw}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 .$$



Rys.4.2. Ilustracja zasady superpozycji przyczyn i skutków słusznej dla liniowych układów dynamicznych

Odpowiedź swobodna $x_{sw}(t)$ wynika z dwu przyczyn, niezerowych warunków początkowych dla $t = 0$, które musi spełniać odpowiedź całkowita, $x_{wymcałk}(t)$, oraz ze sposobu przyłożenia obciążenia w czasie.

Ogólnie można powiedzieć, że $x_{sw}(t)$ będzie zerowa jedynie, jeśli warunki początkowe będą zerowe oraz sposób przyłożenia obciążenia w czasie będzie taki, że $x_{wym}(0)$ oraz $\dot{x}_{wym}(0)$ będą zerowe. W pozostałych przypadkach będzie ona różna od zera, a jej szybkość zaniku zależna będzie od stopnia tłumienia w modelu.

Po zaniknięciu tych drgań przejściowych dla $t > t_p$ otrzymamy tzw. odpowiedź ustaloną:

$$x_{całk.wym}(t) = x_{wym}(t) = x(t), \text{ dla } t > t_p,$$

którą symbolicznie łatwo zapisać a także obliczyć za pomocą całki spłotu:

$$x_{wym.ustalone}(t) = x(t) = \int_0^t F(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (4.5)$$

Wielkość $h(t)$ jest tutaj odpowiedzią impulsową naszego modelu (patrz rys. 4.2), którą łatwo znaleźć przedstawiając wymuszenie w postaci impulsu Diracowskiego, $F(t) = 1 \cdot \delta(t)$.

Dla modelu o jednym stopniu swobody z tłumieniem odpowiedź impulsowa ma postać:

$$h(t) = \frac{\omega_0}{k\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin \omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t. \quad (4.6)$$

Za jej pomocą i wzoru (4.5) można wyznaczyć każdą odpowiedź ustaloną, tzn. wyznaczyć drgania wymuszone ustalone układu dynamicznego. Tytułem przykładu w tabeli 4.1 podano kilka obliczonych w ten sposób odpowiedzi układu dynamicznego o JSS dla najbardziej typowych wymuszeń.

Jak widać z tabeli odpowiedzi na wymuszenia stałe i jednostajnie rosnące są diametralnie różne od odpowiedzi na wymuszenia eksponencjalne i harmoniczne. Ponieważ jednak wymuszenie harmoniczne jest wymuszeniem elementarnym z jednej strony i często spotykanym w maszynach o ruchu obrotowym z drugiej, to analizą własności tej odpowiedzi zajmiemy się bliżej.

T a b e l a 4.1

Odpowiedzi ustalone układu o JSS (m, k, c)
dla typowych wymuszeń [13]

Wymuszenie $F(t)$	Odpowiedź ustalona $x_{ust}(t)$	U w a g i
1	$\frac{1}{k}$	$i = \sqrt{-1}$
t	$t/k - c/k^2$	
t^2	$t^2/k - 2ct/k^2 = 2c^2/k^2 - 2m/k^2$	$g(p) = [(k - mp^2)^2 + (cp)^2]^{-1}$
$e^{\pm \alpha t}$	$(m\alpha^2 \pm c\alpha + k)^{-1} = h(\pm \alpha)$	$e^{ipt} = \cos pt + i \sin pt$ = wzór Eulera
$te^{\pm \alpha t}$	$h(\pm \alpha) e^{\pm \alpha t} - h^2(\pm \alpha) (c \pm 2m\alpha) \cdot te^{\pm \alpha t}$	Przeanalizuj w tym światle trzy ostatnie rezultaty.
e^{ipt}	$(k - mp^2 + icp)^{-1} e^{ipt}$	
sin pt	$g(p) [(k - mp^2) \sin pt - cp \cos pt]$	
cos pt	$g(p) [cp \sin pt + (k - mp^2) \cos pt]$	

4.3. REAKCJA UKŁADU NA WYMUSZENIE HARMONICZNE I OKRESOWE

Zdarzenia zdeterminowane jednorazowe lub powtarzające się można zgodnie z teorią szeregów Fouriera [15] rozłożyć na zdarzenia elementarne typu $\sin pt$, $\cos pt$. Ścisłej mówiąc do zdarzeń jednorazowych należy stosować całkę Fouriera, zaś szereg do zjawisk okresowych. Jednak dla wystarczających czasów trwania zdarzeń (znacznie większych niż czas własny układu dynamicznego T_0) można się posługiwać sztucznym powtórzeniem zjawiska. Jeśli teraz pod pojęcie, zdarzenie, zjawisko, podstawimy wymuszenie działające na układ dynamiczny, to dojdziemy do możliwości wyrażenia prawie każdego wymuszenia w kategoriach harmonicznym wymuszeń elementarnych typu $\sin pt$, $\cos pt$. Matematycznie konkluzję tę można zapisać jak niżej:

Dla wymuszeń T okresowych:

$$F(t) = F(t+T) = \sum_{r=0}^{\infty} f_r \cos(rpt + \varphi_r) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} F_r e^{irpt} \quad (4.7)$$

oraz dla wymuszeń o czasie trwania T dostatecznie długich w porównaniu z czasem własnym T_0 układy dynamicznego:

$$F(t) \approx \sum_{r=0}^{\infty} f_r \cos(rpt + \varphi_r) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} F_r e^{irpt}, \quad T \gg T_0,$$

$$F(t) = 0, \quad \text{dla } t > T.$$

gdzie: $p = 2\pi/T$, $f_r = \sqrt{a_r^2 + b_r^2}$, $\operatorname{tg} \varphi_r = \frac{b_r}{a_r}$.

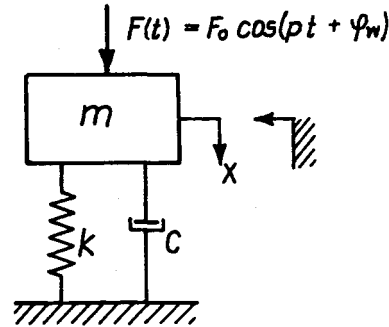
$$a_r = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos rpt, \quad b_r = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin rpt,$$

$$F_r = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) e^{-rpt}$$

Wiedząc więc, że dowolne wymuszenie zdefiniowane można otrzymać jako syntezę wymuszeń elementarnych harmonicznym, weźmy pod uwagę zachowanie się modelu o JSS w tym przypadku (rys. 4.3).

Równanie ruchu układu można otrzymać z zasady d'Alemberta i podobnie jak w (3.1) będzie ono miało postać:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(pt + \varphi_w) \quad (4.8)$$



Rys.4.3. Układ o jednym stopniu swobody z wymuszeniem harmonicznym niezależnym od częstości

Zgodnie z tym co powiedziano w punkcie (4.2) ruch całkowity naszego modelu będzie złożony z drgań swobodnych wzbudzonych warunkami początkowymi i przyłożeniem wymuszenia oraz z drgań wymuszonych ustalonych. Pierwszy składnik zanika szybko z czasem, a przedmiotem naszego zainteresowania pozostają drgania wymuszone, których postać czasowa pozostaje podobna do funkcji wymuszającej.

W naszym przypadku będzie to funkcja cosinus o niewiadomej amplitudzie i fazie. Tę ostatnią uwzględniliśmy już w wymuszeniu dodając tam niewiadomą fazę φ_w . Przewidując więc rozwiązanie postaci:

$$x(t) = A \cos pt \quad (4.9)$$

i podstawiając do równania (4.8), znajdziemy:

$$\begin{aligned} (-mp^2+k) A \cos pt - c p A \sin pt &= F_0 \cos \varphi_w \cos pt - \\ &- F_0 \sin \varphi_w \sin pt. \end{aligned}$$

Żądając wypełnienia powyższej równości dla każdej chwili czasu t otrzymamy dwa równania:

$$(-mp^2+k) A = F_0 \cos \varphi_w, \quad -cpA = -F_0 \sin \varphi_w.$$

Dzieląc stronami powyższe, a także niezależnie podnosząc do kwadratu i dodając stronami do siebie, uzyskamy ostatecznie dwie relacje końcowe:

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(-mp^2+k)^2 + c^2p^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi_w = \frac{c p}{-mp^2+k}. \quad (4.10)$$

Jak widać jest to formalne zakończenie rozwiązywania drgań wymuszonych ustalonych, gdyż określiliśmy amplitudę A oraz fazę drgań ϕ . Zanim jednak przejdziemy do dyskusji i wniosków, wprowadźmy niezbędne przekształcenia doprowadzając całość do parametrów bezwymiarowych.

$$A = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{p^2}{\omega_0^2}}}, \quad \operatorname{tg} \varphi_w = \frac{2\xi p / \omega_0}{1 - \frac{p^2}{\omega_0^2}} = \frac{2\xi\delta}{1 - \delta^2}, \quad (4.11)$$

gdzie $x_{st} = F_0/k$ jest ugięciem statycznym naszego modelu, $\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$ znanym stopniem tłumienia,

$\sigma = p/\omega_0$ - bezwymiarową częstością wymuszenia. Zwróćmy uwagę, że współczynnik dynamiczny wynosi tu $\mu = A/x_{st}$. Rezultaty uzyskane dla amplitudy i fazy drgań wymuszonych najlepiej przedstawić graficznie w postaci zależności od bezwymiarowej częstości wymuszenia σ ze stopniem tłumienia ξ jako dodatkowym parametrem. Rysunek 4.4a przedstawia charakterystykę amplitudową zaś 4.4b fazową drgań wymuszonych.

Najważniejszym wnioskiem wypływającym z powyższych rysunków jest zjawisko rezonansu polegające na zwielokrotnieniu amplitudy drgań w porównaniu z ugięciem statycznym x_{st} . Zjawisko to zachodzi dla $\sigma \approx 1$ tzn. gdy częstość wymuszenia jest równa bądź bliska częstości własnej ω_0 układu dynamicznego. Wtedy dla małych $\xi < 0,1$ które nas interesują w inżynierii mechanicznej,

mamy: $A_{rez} = \frac{x_{st}}{2\xi}$ $\varphi_{w rez} = \Pi/2$. Tak więc jeśli stopień tłumienia $\xi = 0,01$, co dla materiałów

konstrukcyjnych nie jest rzadkością, to amplituda rezonansowa będzie 50 razy większa od statycznej.

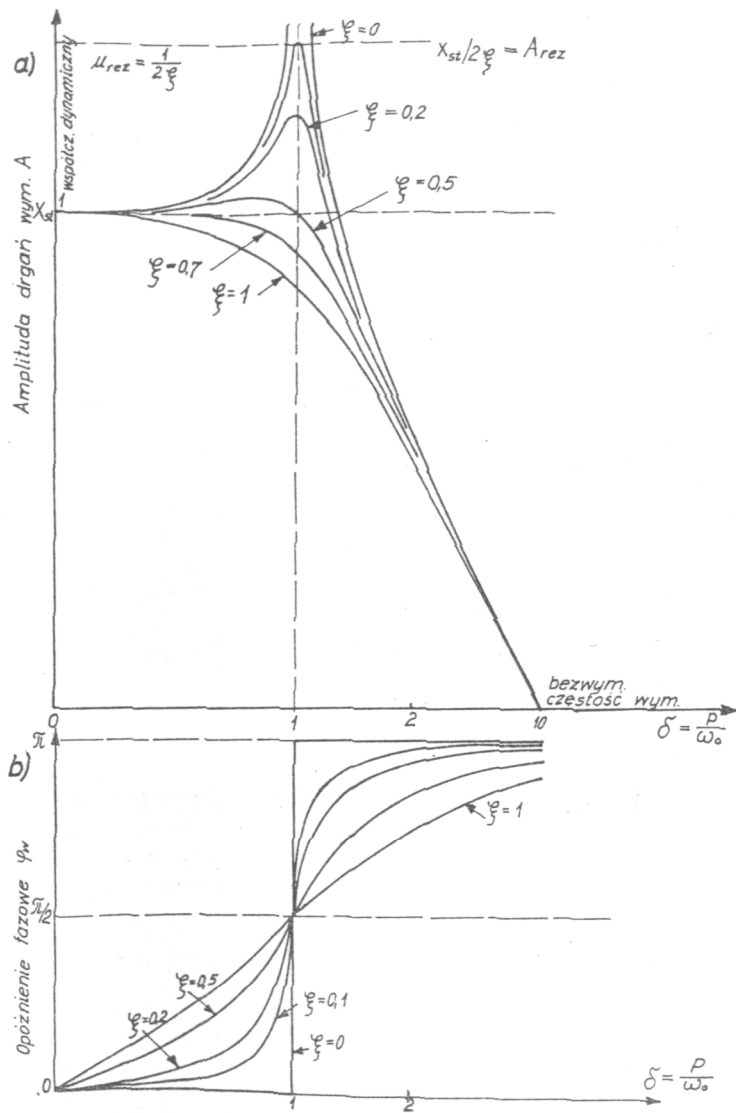
Stąd też w kategoriach naprężeń współczynnik dynamiczny $\mu = \frac{\sigma_{dyn}}{\sigma_{stat}} = 50$.

Jest prawie niemożliwe ze względów choćby ciężarowych stosować tak duże współczynniki bezpieczeństwa, by zapobiec zmęczeniu materiałów i katastrofie w rezonansie np. przy $\mu = 50$.

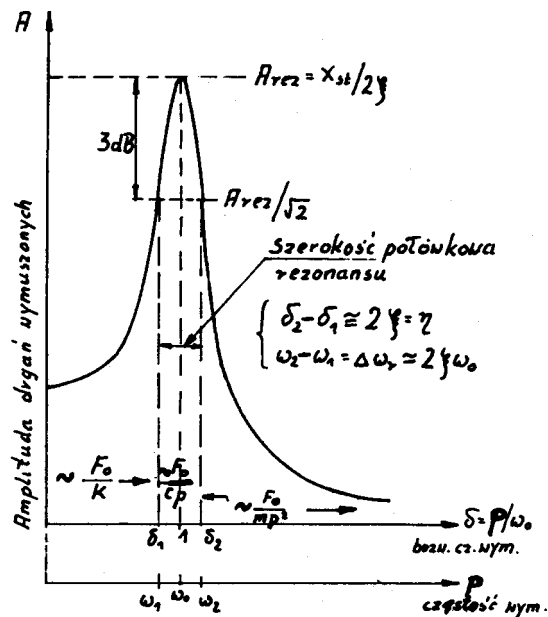
Zwróćmy jeszcze uwagę na pewne cechy szczególne charakterystyki amplitudowej naszego modelu dla $\xi < 0,1$, które stwarzają inną możliwość pomiaru tłumienia niż za pomocą drgań swobodnych (patrz punkt 3.3) oraz dają przesłanki do racjonalnej redukcji amplitud drgań w obiektach mechanicznych.

Z wyrażenia (4.11) obliczmy $A_{rez} \cong \frac{x_{st}}{2\xi}$ ($\delta = 1$) oraz amplitudę połowy energii kinetycznej w rezonansie

Ponieważ $T_{rez} = \frac{1}{2} m A_{rez}^2 \omega_0^2$, to $\frac{1}{2} T_{rez} = \frac{1}{2} m \left(\frac{A_{rez}}{\sqrt{2}} \right)^2 \omega_0^2$



Rys.4.4. Charakterystyka amplitudowa i fazowa drgań wymuszonych siłą harmonicznje zmienną



Rys.4.5. Ilustracja szerokości połówkowej rezonansu jako bazy metody określania tłumienia w układzie, a także ilustracja wpływu parametrów modelu (m,k,c) na wartość amplitudy drgań wymuszonych

Jak widać z rysunku szerokość połówkową rezonansu można również wyznaczyć odmierzając 3 dB poniżej szczytu rezonansowego $20 \lg \sqrt{2} \cong 3dB$. Ponadto warto podkreślić, że określenie szerokości połówkowej daje nam od razu wartość stopnia tłumienia w układzie $\Delta\omega_r = 2\xi\omega_0$, co daje doskonałą metodę pomiaru tłumienia ze znanej krzywej rezonansowej. Dla porządku warto tu wprowadzić jeszcze czasem stosowane nazewnictwo - współczynnik strat $\eta = 2\xi$ oraz dobroć układu $Q = \frac{1}{\eta} = \frac{1}{2\xi}$. Weźmy obecnie pod uwagę wzory (4.10, 4.11) i sprawdźmy od jakich parametrów układu (m, k, c) może zależeć amplituda drgań wymuszonych:

$$A \approx \begin{cases} \frac{F_0}{k}, & \text{dla } p \ll \omega_0, (\delta \ll 1), \\ F_0/c\omega_0, & \text{dla } p \sim \omega_0, (\delta \sim 1), \\ \frac{F_0}{mp^2}, & \text{dla } p \gg \omega_0, (\delta \gg 1). \end{cases} \quad (4.12)$$

Jak widać z powyższego w strefie przedrezonansowej ($p \ll \omega_0$) amplituda drgań wymuszonych determinowana jest przez sztywność (k), układu, w strefie rezonansowej ($p \gg \omega_0$) przez tłumienie (c), natomiast w strefie poza rezonansowej ($p \gg \omega_0$) przez masę, tak jakby nie było sprężyny i tłumienia (masa swobodna). Wnioski te bardzo istotne dla minimalizacji drgań przedstawiono również na rysunku 4.5.

Wracając obecnie do poruszonego na wstępie wymuszenia T-okresowego typu (4.7) będącego w efekcie sumą harmonik, to zgodnie z rysunkiem 4.2 odpowiedź będzie również sumą odpowiedzi harmonicznyc. Te odpowiedzi harmoniczne znajdziemy z (4.10), jeśli zamiast p podstawimy $r p$, $r = 1, 2, \dots$. Tak więc jeśli na model o jednym stopniu swobody (rys. 4.3) działa dowolne wymuszenie zdeterminowane rozkładalne w szereg Fouriera, tzn. gdy

$$F(t) \approx \sum_{r=0}^{\infty} f_r \cos(rpt + \varphi_r), \quad (4.13)$$

(patrz 4.7), to odpowiedź na powyższe wymuszenie będzie:

$$x(t) \approx \sum_{r=0}^{\infty} A_r \cos(rpt + \varphi_r + \varphi_{rw}) = \sum_{r=0}^{\infty} x_r(t), \quad (4.14)$$

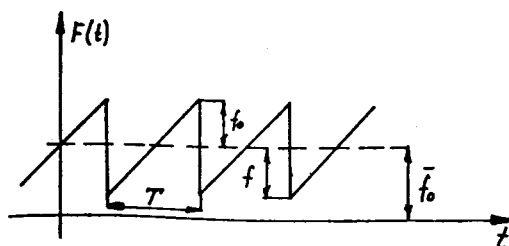
gdzie:

$$A_r = \frac{f_r}{\sqrt{(-mr^2p^2+k)^2 + c^2r^2p^2}}, \quad \text{tg}\varphi_{rw} = \frac{crp}{-mr^2p^2+k}.$$

Tak więc na podstawie powyższych formuł potrafimy znaleźć ustaloną odpowiedź naszego modelu na dowolne wymuszenie zdeterminowane długotrwałe ($T \gg T_0$). Warto na zakończenie zwrócić uwagę, że jeśli wymuszenie (4.13) ma dużą ilość znaczących wyrazów szeregu, to prawie zawsze znajdzie się takie $r p$ – bliskie $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, że układ znajdzie się w stanie drgań rezonansowych.

Minimalizując więc drgania należy unikać wymuszeń o dużej ilości harmonicznyc.

Przykład 1. Obciążenie głowicy frezarskiej lub koparki czerpakowej może być zmodelowane jak na rysunku 4.6.



Rys.4.6. Modelowe obciążenie głowicy frezarskiej bądź koła czerpakowego koparki

Znaleźć jego rozkład w szereg Fouriera. Odpowiedź:

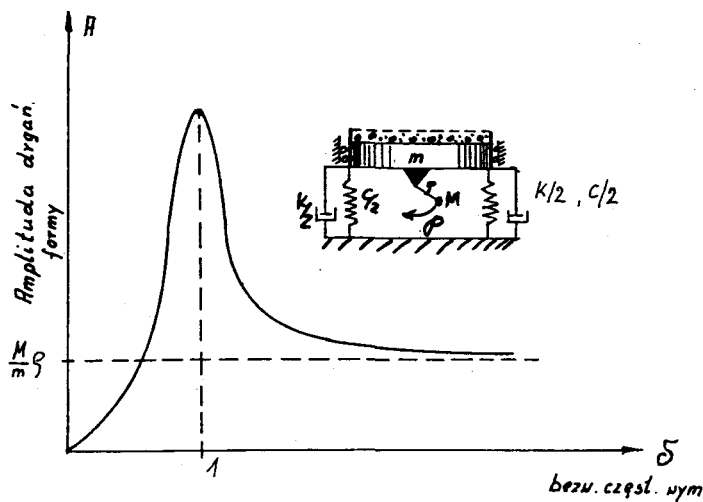
$$F(t) = f_0 + 2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f_0}{\pi r} (-1)^r \sin rpt,$$

$$p = 2\pi/T.$$

Przykład 2. Wibrator bezwładnościowy wprawia w ruch formę wypełnioną zaprawą cementową. Zakładając, że wielkość masy niewyrównoważonej wynosi N o promieniu ρ , zaś masa formy z zaprawą m posadowiona jest na elementach sprężystych o sumarycznych parametrach k, c , znaleźć charakterystykę amplitudową częstotliwością układu formy.

Odpowiedź:

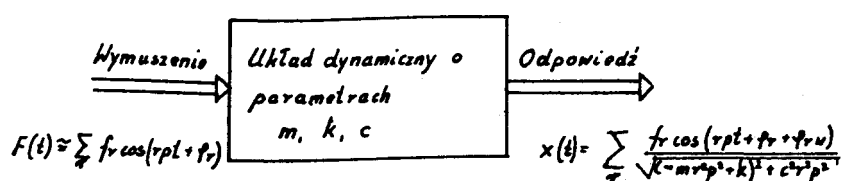
$$A = \frac{M \rho p^2 / k}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{p^2}{\omega_0^2}}} = \frac{\frac{M}{m} \rho \delta^2}{\sqrt{(1 - \delta^2)^2 + 4\xi^2 \delta^2}}$$



Rys.4.7. Charakterystyka częstotliwościowa układu formy napędzanej wibratorem bezwładnościowym jako przykład wymuszenia o amplitudzie zależnej od częstotliwości

4.4. REDUKCJA DRGAŃ, WIBROIZOLACJA

Jak wyjaśniliśmy obszernie w rozdziale 1 jednym z celów analizy dynamicznej obiektów mechanicznych jest minimalizacja lub redukcja drgań. Dla właściwego naświetlenia zagadnienia weźmy pod uwagę jednocześnie zmodyfikowany rysunek 4.2 oraz wzór (4.14) przedstawiający odpowiedź układu dynamicznego przy wymuszeniu zdeterminowanym, (rys. 4.8).

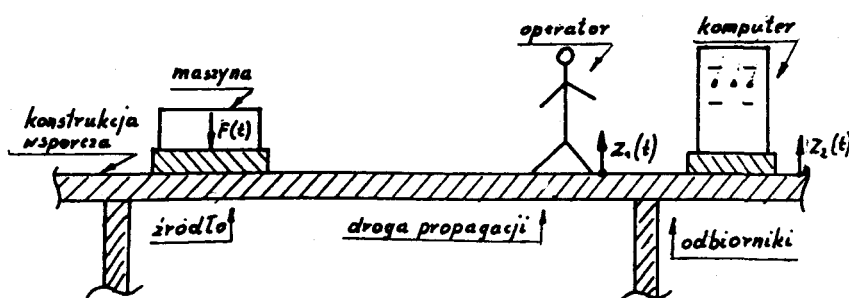


Rys.4.8. Reakcja układu dynamicznego jako ilustracja możliwych sposobów minimalizacji drgań

Jak wynika z analizy wzoru przytoczonego w prawej części rysunku (4.8) minimalizacja odpowiedzi $x(t)$ może polegać na:

- 1° Zmniejszeniu amplitudy harmonicznych składowych sił wymuszających f_r , bądź też nawet o ile to możliwe zlikwidowaniu niektórych składowych f_r .
- 2° Zmianie parametrów układu dynamicznego m, k, c , tak by osiągnąć możliwe minimum amplitudy drgań; patrz wzory (4.12).

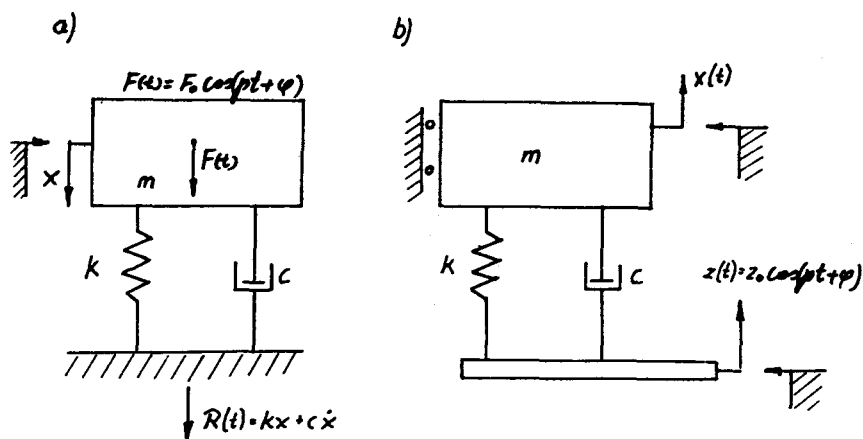
Podane wyżej sposoby minimalizacji wypływające z analizy modelu matematycznego układu nie niosą informacji lokalizującej przestrzennie miejsca redukcji drgań. Z tego punktu widzenia dobrze jest wyróżnić układ dynamiczny typu: źródło - droga propagacji - odbiornik (rys. 4.9).



Rys.4.9. Ilustracja potrzeby minimalizacji drgań w układzie: „źródło - droga propagacji - odbiornik”

Źródło to okolica obiektu, w której wytwarzana jest siła wymuszająca $F(t)$, natomiast droga propagacji jak i odbiornik (człowiek, maszyna, itp.) to układy dynamiczne jak na rysunku 4.8. Tak więc punkt pierwszy (1°) powyższych poczynań minimalizacyjnych dotyczy w większości źródła drgań, natomiast punkt (2°) dotyczy zarówno drogi propagacji jak i odbiornika drgań. Mimo że zmiana parametrów m, k, c naszego układu dynamicznego wyczerpuje możliwości minimalizacji drgań na drodze propagacji, to jednak nie daje zawsze w pełni zadowalającej interpretacji technicznej. Taki szczególny przypadek warty odrębnej analizy i interpretacji widoczny jest na rysunku 4.9, gdzie można wyróżnić przekazywanie sił dynamicznych z maszyny na konstru -

kcję wsparczą oraz przekazywanie przemieszczeń dynamicznych z konstrukcji na układ chroniony (np. człowiek, komputer). W pierwszym przypadku mamy do czynienia z potrzebą wibroizolacji sił, zaś w drugim wibroizolacji przemieszczeń. Modele obu zagadnień przedstawiono oddzielnie na rysunku 4.10 przy założeniu wymuszenia harmonicznego.



Rys.4.10. Modele wibroizolacji siłowej (a) i przemieszczeniowej (b)

Zdefiniujemy funkcję wibroizolacji niezależną od charakteru wymuszenia. W pierwszym wypadku (a) weźmy iloraz amplitud sił, natomiast w drugim (b) iloraz przemieszczeń. Tak więc będziemy mieli:

$$K_F = \frac{\text{Ampl}[R(t)]}{\text{Ampl}[F(t)]}, \quad K_x = \frac{\text{Ampl}[x(t)]}{\text{Ampl}[z(t)]}, \quad (4.15)$$

z oczywistym kryterium wibroizolacji

$$K_F < 1, \quad K_x < 1. \quad (4.16)$$

Pisząc równania ruchu układów z rysunku (4.10) można otrzymać

$$\begin{aligned} \text{a) } m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= F_0 \cos(pt + \varphi), \\ \text{b) } m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= c\dot{z} + kz, \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$R = c\dot{x} + kx, \quad z(t) = z_0 \cos(pt + \varphi).$$

Przewidując dla (4.17) rozwiązania harmoniczne:

$$R = R_0 \cos pt, \quad x = x_0 \cos pt,$$

po przekształceniach można uzyskać:

$$R_0 = F_0 \left[\frac{k^2 + c^2 p^2}{(k - mp^2)^2 + c^2 p^2} \right]^{1/2}, \quad x_0 = z_0 \left[\frac{k^2 + c^2 p^2}{(k - mp^2)^2 + c^2 p^2} \right]^{1/2} \quad (4.18)$$

Patrząc na definicje funkcji wibroizolacji i powyższe można dojść do wniosku, że przenoszenie sił (K_F) jest takie samo jak przenoszenie przemieszczeń (K_x), gdyż:

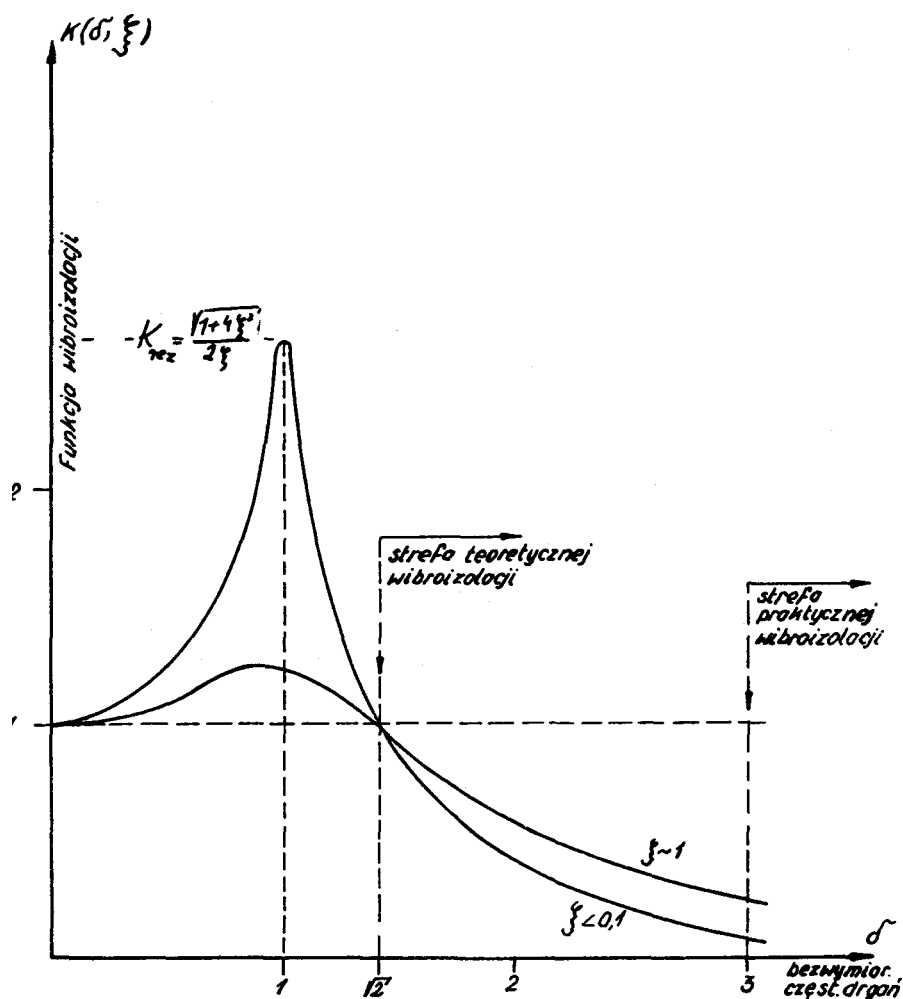
$$K_F = K_x = \left[\frac{k^2 + c^2 p^2}{(k - mp^2)^2 + c^2 p^2} \right]^{1/2} = \left[\frac{1 + 4\xi^2 \delta^2}{(1 - \delta^2)^2 + 4\xi^2 \delta^2} \right]^{1/2} = \kappa, \quad (4.19)$$

gdzie jak poprzednio:

$$\delta = p / \omega_0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \xi = \frac{c}{c_{kr}}, \quad c_{kr} = 2 \sqrt{km}.$$

Konfrontując otrzymany wynik (4.19) z warunkiem wibroizolacji $K < 1$ możemy powiedzieć, że teoretycznie:

$$K < 1 \text{ dla } \delta = p/\omega_0 \gg \sqrt{2}. \quad (4.20)$$



Rys.4.11. Graficzna ilustracja funkcji wibroizolacji oraz jej obszarów

Ze względu jednak na wahania częstości wymuszających maszyn, a także możliwe błędy obliczeń, przyjmujemy zamiast powyższej strefy teoretycznej wibroizolacji jej obszar praktyczny określony nierównością:

$$K \ll 1 \text{ dla } \delta = p/\omega_0 > 3 \quad (4.21)$$

Warto zwrócić tu uwagę, że wartość funkcji wibroizolacji (4.19) jest prawie niezależna od tłumienia dla $\xi < 0,1$, co odpowiada większości przypadków technicznych. Natomiast dla $\xi \sim 1$ zależy bardzo

istotnie od tłumienia, a efekt wibroizolacji prawie zanika. Pokazane uprzednio własności funkcji wibroizolacji oraz interpretacja techniczna tego zjawiska przedstawiona jest na rysunku 4.11.

Przykład. Agregat sprężarkowy (sprężarka wirowa) należy posadowić elastycznie tak, by współczynnik wibroizolacji był mniejszy lub równy 0,1. Znaleźć ugięcie statyczne amortyzatorów, jeśli obroty agregatu są $n = 1200$ obr/min.

Rozwiązanie. Zakładamy $\xi < 0,1$, wtedy można przyjąć:

$$k \approx \frac{1}{|1 - \delta^2|} \ll 0,1, \text{ co daje } \delta^2 \gg 11, \delta \approx 3,4.$$

Wiemy również, że:

$$\delta^2 = \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{60} / \frac{2\pi \cdot 5}{\sqrt{x_{st}}}\right)^2 = \left(\frac{n}{300}\right)^2 x_{st},$$

stąd też:

$$x_{st} = \left(\frac{300}{n}\right)^2 \delta^2 = \left(\frac{300}{1200}\right)^2 \cdot 11 = \frac{11}{16} = 0,68 \text{ cm},$$

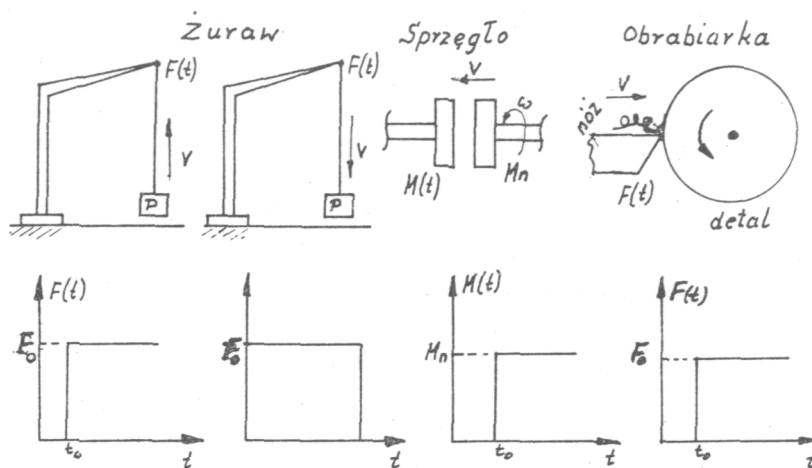
4.5. REAKCJA UKŁADU NA WYMUSZENIE KRÓTKOTRWAŁE

Jednym z celów analizy dynamicznej, jak to już niejednokrotnie podkreślono, jest wyznaczenie tzw. współczynnika dynamicznego, który w projektowaniu umożliwia umowne przejście od analizy dynamicznej do statycznej. Pierwszy taki współczynnik dynamiczny μ określiliśmy już dla wymuszenia harmonicznego

(równanie 4.11, rys. 4.4), gdzie np. $\omega_{rez} = \frac{1}{2\xi}$, ($\sigma = 1$)

Jak się okazuje ten sposób rozumowania w kategoriach nadwyżek dynamicznych można również zastosować do wymuszeń krótkotrwałych, które zgodnie z rysunkiem 4.1 zostały potraktowane jako odrębny typ wymuszenia.

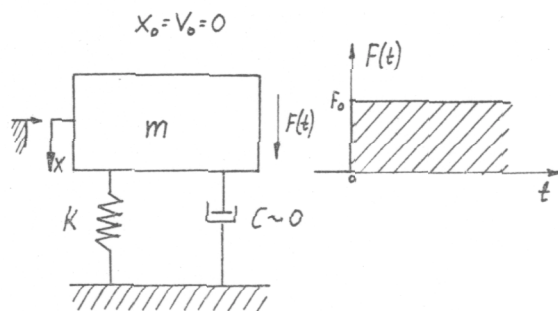
Przed rozpoczęciem analizy warto przytoczyć kilka przykładów takiego obciążenia i sposób ich aproksymacji modelowej. W pierwszym rzędzie tu wymienić zdjęcie lub nałożenie obciążenia na obiekt mechaniczny. Ten sposób pracy jest charakterystyczny dla dźwignic przy podnoszeniu i kładzeniu ciężaru, włączaniu napędu za pomocą sprzęgieł, maszyn obróbczych przy wejściu lub wyjściu narzędzia z obrabianego detalu, itp. Rysunek 4.12 przedstawia te przypadki łącznie z modelową aproksymacją wymuszenia (w dokładniejszych badaniach należy stosować trapezoidalne funkcje włączenia).



Rys.4.12. Ilustracja zdjęcia lub nałożenia obciążenia na obiekt mechaniczny i odpowiednio modelowe aproksymacje siły wymuszającej $F(t)$

Model każdego z tych obiektów można zredukować do układu o jednym stopniu swobody (m.k.c), na który działa siła $F(t) = F_0 H(t - t_0)$,

$$H(t - t_0) = \begin{cases} 1, & t \geq t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases}, \text{ tak jak na rysunku 4.13.}$$



Rys.4.13. Model o jednym stopniu swobody z pomijalnym tłumieniem ($c \sim 0$) do analizy nałożenia ($+F_0$) lub zdjęcia obciążenia ($-F_0$)

Ponieważ jesteśmy zainteresowani reakcją układu tuż po włączeniu lub wyłączeniu obciążenia, to można przyjąć $c = 0$, gdyż w tak krótkim czasie dyssypacja energii nie odgrywa roli. Ograniczając się do przypadku nałożenia obciążenia i zerowych warunków początkowych możemy napisać równanie ruchu:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 H(t), \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0. \quad (4.22)$$

Jego rozwiązanie można znaleźć za pomocą całki spłotu (4.5) lub metodą przedstawioną niżej. Wiemy, że $x(t) = x_{sw}(t) + x_{wym.ust}(t)$, zaś dla $F(t) = F_0 H(t) = F_0$ dla $t > 0$ $x_{wym.ust}(t) = F_{0/k}$

Ponadto $x_{sw}(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$. Kombinując tę wiedzę mamy

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{k}, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

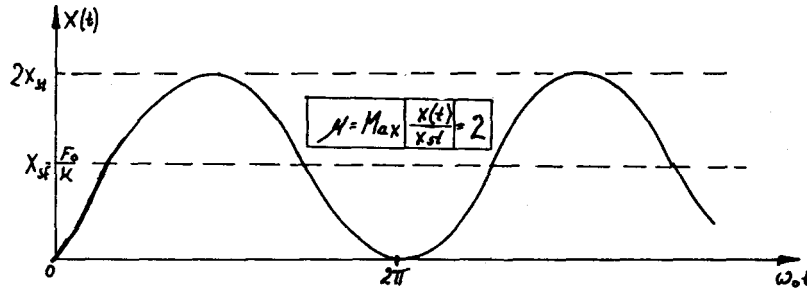
Po uwzględnieniu warunków początkowych ($B = 0$, $A = -F_{0/k}$) ostatecznie znajdziemy

$$x(t) = \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega_0 t) = x_{st} (1 - \cos \omega_0 t),$$

skąd współczynnik dynamiczny μ :

$$\mu = \text{Max} \left| \frac{x(t)}{x_{st}} \right| = \text{Max} |1 - \cos \omega_0 t| = 2. \quad (4.23)$$

Tak więc dla przykładu zdjęcia bądź nałożenia obciążenia należy zawsze przyjmować $\mu = 2$, zaś drgania o amplitudzie x_{st} odbywają się wokół nowego położenia równowagi tak jak na rysunku 4.14.



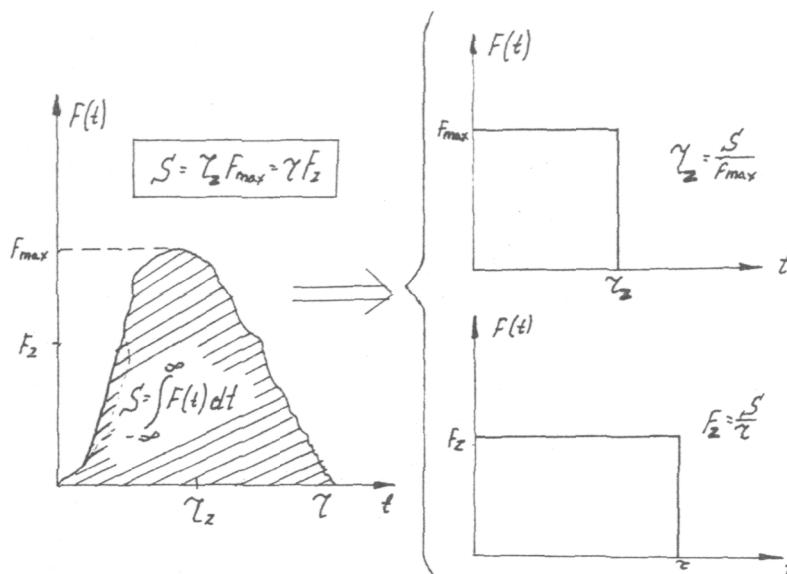
Rys.4.14. Ilustracja drgań po nałożeniu obciążenia F_0 na układ o sztywności k , oraz przesunięcie środka drgań o $x_{st} = F_0/k$

W wielu przypadkach zdjęcie i nałożenie obciążenia następuje w niewielkim odstępie czasu rzędu okresu drgań układu. Ponadto istnieje cała klasa obciążeń impulsowych, uderzeniowych, jak np. przy kuciu, wbijaniu pali w wybuchach, itp. gdzie mamy do czynienia z jednoimiennymi obciążeniami krótkotrwałymi.

Stąd też należy oddzielnie zastanowić się, jak w tych przypadkach wygląda współczynnik dynamiczny. Wpierw jednak parę słów o zastępowaniu rzeczywistych obciążeń impulsowych obciążeniami modelowymi do analizy

uproszczonej. Problem ten rozwiązuje się na bazie równości popędów $S = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) dt$, rzeczywistego i

modelowego. Najłatwiej jest zastąpić obciążenie rzeczywiste impulsem siły prostokątnym, tak jak na rysunku 4.15, lecz zasada równości popędów stosuje się do dowolnego kształtu impulsu.



Rys.4.15. Graficzna ilustracja aproksymacji rzeczywistego obciążenia impulsowego impulsem prostokątnym na zasadzie równości popędów siły

Mając do dyspozycji minikomputer można dokładnie wyznaczyć wartość współczynnika dynamicznego posługując się wprowadzonym już splotem (4.5), skąd:

$$\mu = \text{Max}_t \left\{ \frac{1}{x_{st}} \left| \int_0^{\tau} F(\tau) h(t - \tau) d\tau \right| \right\},$$

$$x_{st} = \frac{F_{max}}{k} . \quad (4.24)$$

My jednak kosztem dokładności (niewielkim) chcemy uchwycić związki ogólne rządzące współczynnikiem dynamicznym μ . Stąd też posługując się aproksymacją - impulsem prostokątnym

(rys. 4.15) zauważmy, że można go potraktować jako superpozycję nałożenia obciążenia (np. F_0) w chwili $t = 0$ oraz zdjęcia obciążenia ($-F_0$) w chwili $t = \tau$. Tak więc równanie ruchu naszego modelu będzie:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 [H(t) - H(t - \tau)] , \quad (4.25)$$

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0 .$$

Zauważmy, że podczas działania obciążenia, tzn. dla $t < \tau$, można napisać poprzednie rozwiązanie (4.23), czyli:

$$x(t) = \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega_0 t), \quad t < \tau . \quad (4.26)$$

Jeśli zaś obciążenie działa długo, tzn. $\frac{\tau}{T_0} > 1/2$, to wyrażenie w nawiasie osiągnie wartość równą 2.

Stąd też i w tym przypadku dla $\frac{\tau}{T_0} > 1/2$ $\mu = \text{Max} \left| \frac{x(t)}{x_{st}} \right| = 2$

Jeśli zaś układ nie zdążył uzyskać maksymalnego wychylenia podczas trwania obciążenia, tzn. gdy $\frac{\tau}{T_0} < 1/2$, to dla uzyskania rozwiązania zastosujemy proponowaną już superpozycję:

$$x(t) = \underset{\text{nał.obc.}}{x(t)} + \underset{\text{zdj.obc.}}{x(t)}$$

Tak więc przesuwając czas o τ dla przypadku zdjęcia obciążenia będziemy na podstawie (4.26) mieli:

$$x(t) = \underset{\text{nałożenie}}{\frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega_0 t)} + \underset{\text{z zdjęcie}}{\frac{F_0}{k} [1 - \cos \omega_0 (t - \tau)]} , \quad (4.27)$$

$$\text{obciążenia}$$

$$\frac{\tau}{T_0} < 1/2$$

$$t > \tau ,$$

co po przekształceniach pozwala otrzymać

$$x(t) = 2 x_{st} \sin \frac{\omega_0 \tau}{2} \sin \omega_0 (t - \tau/2), \quad t > \tau ,$$

oraz:

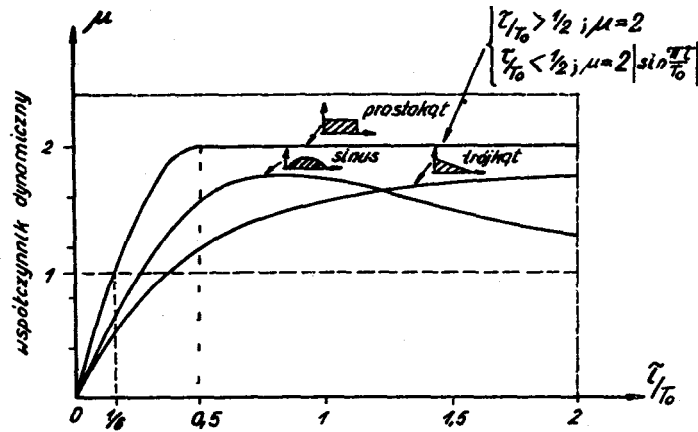
$$\mu = \text{Max}_t \left| 2 \sin \frac{\pi \tau}{T_0} \right| , \quad \frac{\tau}{T_0} < 1/2 .$$

(4.28)

Tak więc dla obciążeń istotnie krótkotrwałych, $\frac{\tau}{T_0} < \frac{1}{2}$, można uzyskać współczynnik

dynamiczny mniejszy od dwu, a nawet mniejszy od jedności ($\mu < 1$ dla $\frac{\tau}{T_0} < 1/6$).

Dobierając więc długość impulsu bądź okres drgań mamy możliwość sterowania nadwyżką dynamiczną w układzie (np. elemencie maszyny).



Rys.4.16. Współczynnik dynamiczny przy obciążeniach impulsowych [16]

Jako zakończenie naszych rozważań może służyć ilustracja graficzna współczynnika dynamiczności, tak jak na rysunku 4.16, gdzie dla porównania pokazano również działanie impulsów sinusowego i trójkątnego [16].

4.6. REAKCJA UKŁADU DYNAMICZNEGO NA WYMUSZENIE PRZYPADKOWE

W przeważającej części przypadków drgań wymuszonych słuszne jest podejście zaproponowane powyżej, tzn. rozkładu wymuszenia $F(t)$ na wymuszenia elementarne i synteza odpowiedzi całkowitej z odpowiedzi cząstkowych. Jednak dla wymuszeń przypadkowych podejście to staje się nieefektywne, gdyż zamiast liczyć chwilowe wartości amplitud jak dotychczas, musimy przejść do oceny charakterystyk np. do oceny amplitudy średniokwadratowej (np. F_{RMS} , patrz 4.1). Można wyliczyć wiele przypadków dynamiki obiektów mechanicznych, gdzie wymuszenie ma charakter przypadkowy, a przy pewnych ograniczeniach nawet stacjonarny i ergodyczny. Można tu wymienić reakcje obiektów morskich (statki, platformy wydobywcze, itp.) na falowanie morza, reakcje dźwigów i innych urządzeń na podmuchy wiatru, zbiorników na szerokopasmowe pulsacje ciśnienia zasilającego a także reakcje wszelkiego typu pojazdów na profil drogi. Najprostszy model wymuszenia przypadkowego możliwy do zastosowania w tych przypadkach to tzw. biały szum pasmowy. Wymuszenie można określić przez analogie do rozkładu Fouriera, w którym wszystkie współczynniki mają taką samą amplitudę, leżącą bardzo blisko siebie i faza ich fluktuuje w sposób przypadkowy. Średniokwadratową amplitudę takiego wymuszenia można obliczyć na podstawie (4.1) i twierdzenia Parsewala:

$$\overline{F^2} = \frac{1}{T} \int_0^T F^2(t) dt = \underbrace{\frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega}_{\text{Tw. Parsewala}}, \quad (4.29)$$

$$F_{RMS} = \sqrt{\overline{F^2}},$$

gdzie $F(\omega)$ jest transformatą Fouriera realizacji $F(t)$. Jeśli wprowadzimy pojęcie gęstości widmowej mocy procesu $G_{FF}(\omega)$ obrazujące rozkład mocy procesu w skali częstości ω , to możemy napisać:

$$G_{FF}(\omega) = \frac{1}{2\pi T} |F(\omega)|^2$$

oraz:

$$\overline{F^2} = \int_{-\infty}^{\infty} G_{FF}(\omega) d\omega. \quad (4.30)$$

To samo rozumowanie można i trzeba zastosować do obliczania średniego kwadratu amplitudy reakcji układu o jednym stopniu swobody.

Jak wynika z (4.5) reakcje obiektu można wyznaczyć jako spłot:

$$x(t) = \int_0^t F(\tau) h(t - \tau) d\tau, \quad (4.31)$$

który w dziedzinie częstotliwości dzięki transformacji Fouriera ma postać:

$$X(\omega) = F(\omega) H(\omega). \quad (4.32)$$

Tutaj $H(\omega)$ jest transmitancją naszego modelu i można ją wyznaczyć na dwa sposoby. Jako transformację Fouriera odpowiedzi impulsowej (4.6) bądź jako iloraz amplitudy odpowiedzi na wymuszenie harmoniczne (4.11) do amplitudy tej siły. W każdym przypadku po obliczeniach otrzymamy:

$$H(\omega) = \frac{A(\omega)}{F_0} = \mathcal{F}[h(t)] = \frac{1}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2 \omega_0^2 \omega^2}}. \quad (4.33)$$

Obliczenie średniego kwadratu odpowiedzi $\overline{x^2}$ ze spłotu (4.31) po przekształceniach doprowadzi nas do:

$$\begin{aligned} \overline{x^2} &= \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 \frac{|F(\omega)|^2}{2\pi T} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 G_{FF}(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Po uwzględnieniu szczególnej postaci transmitancji (4.33) oraz modelu białego szumu pasmowego $G_{FF}(\omega) = \begin{cases} G_0, & \omega \in (-\omega_1, \omega_1) \\ 0, & \omega \notin (-\omega_1, \omega_1) \end{cases}$

mamy [16]:

$$\begin{aligned} \overline{x^2}_{\text{przyp.}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_0 d\omega}{m^2 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2 \omega_0^2 \omega^2]} = \frac{\pi}{2} \frac{G_0}{\xi \omega_0^3 m^2}, \\ \boxed{x_{\text{RMS,przyp}} &= \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{G_0}{\xi \omega_0^3 m^2}}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Tak więc znając matematyczną gęstość widmową wymuszenia G_0 (matematyczną -bo istnieje w paśmie $-\omega_1 + \omega_1$ tzn., również dla ujemnych częstotliwości) oraz parametry układu możemy znaleźć średniokwadratową amplitudę odpowiedzi układu dynamicznego.

Porównajmy uzyskany wynik z deterministycznym i harmonicznym wymuszeniem rezonansowym. Jak wiadomo w tym przypadku mamy:

$$x(t) = \frac{F_0 \cos(pt + \varphi_w)}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi \omega_0^2 \omega^2}} \Bigg|_{\omega = \omega_0} = \frac{G_0 \cos(pt + \varphi_w)}{m(2\xi \omega_0^2)}.$$

Obliczony stąd średni kwadrat wyniesie:

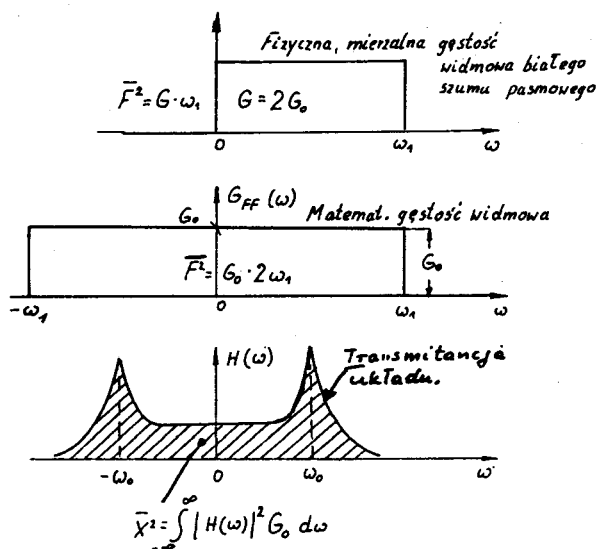
$$\begin{aligned} \overline{x_{rez}^2} &= \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \frac{F_0^2/2}{m^2 4 \xi^2 \omega_0^4} = \frac{\overline{F^2}}{4 \xi^2 \omega_0^4 m^2} = \\ &= \frac{F_{RMS}^2}{4 \xi^2 \omega_0^4 m^2}, \quad \left(F_{RMS} = \frac{F_0}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Porównując średnie kwadraty odpowiedzi na wymuszenie przypadkowe (4.35) oraz harmoniczne rezonansowe (4.36) widzimy tu te same parametry układu dynamicznego: ξ, ω_0, m . Spróbujmy więc doprowadzić oba wzory do takiej postaci, by obliczyć równoważne wymuszenie przypadkowe.

Dla odpowiedzi rezonansowej można ostatecznie więc napisać:

$$\overline{x_{rez}^2} = \frac{F_{RMS}^2}{4 \xi^2 \omega_0^4 m^2} = \frac{F_{RMS}^2}{4 \xi^2 k^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (4.37)$$

Transformacje odpowiedzi przypadkowej (4.35) do wielkości mierzalnej fizycznie ułatwi rysunek 4.17.



Rys.4.17. Ilustracja tworzenia średniego kwadratu odpowiedzi na wymuszenie przypadkowe jako pola pod krzywą transmitancji oraz wyjaśnienie koncepcji matematycznej i fizycznej gęstości widmowej wymuszenia w postaci białego szumu pasmowego

Korzystając z objaśnień rysunku i przechodząc do fizycznej gęstości widmowej mocy możemy zamiast (4.35) napisać:

$$\overline{x_{\text{przyp.}}^2} = \frac{\pi}{2} \frac{G_0}{\xi \omega_0^3 m^2} = \frac{\pi}{2} \frac{G/2 \omega_0}{\xi \omega_0^4 m^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\omega_0 G}{2 \xi k^2},$$

$$2G_0 = G, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Jeśli weźmy pod uwagę koncepcje szerokości połokowej rezonansu (patrz rys. 4.5) $\Delta\omega_r = 2\xi\omega_0$ i wprowadzimy do powyższej równości, to uzyskamy:

$$\overline{x_{\text{przyp.}}^2} = \frac{\pi}{2} \frac{2\xi \omega_0 G}{4 \xi^2 k^2} = \frac{\pi}{2} \frac{G \Delta\omega_r}{4 \xi^2 k^2} = \frac{G \pi \Delta\omega_r}{2} \frac{1}{4 \xi^2 k^2},$$

$$\boxed{\overline{x_{\text{przyp.}}^2} = \frac{\pi \Delta\omega_r G}{2} \frac{1}{4 \xi^2 k^2}} \quad (4.38)$$

Porównując kwadrat amplitudy przy wymuszeniu rezonansowym (4.37) z powyższym, możemy napisać:

$$\boxed{\overline{x_{\text{przyp.}}^2} = (F_{\text{MRS}}^2)_{\text{zast}} \frac{1}{4 \xi^2 k^2}} \quad (4.39)$$

Stąd łatwo zauważyć, że dla wymuszenia typu białego szumu kwadrat odpowiedzi można znaleźć tak samo jak w przypadku wymuszenia rezonansowego harmonicznego ($\frac{1}{4 \xi^2 k^2}$), jeśli jako zastępcze wymuszenie harmoniczne weźmiemy:

$$(F_{\text{RMS}}^2)_{\text{zast}} = \frac{\pi \Delta\omega_r G}{2} \quad (4.40)$$

Tak więc fizyczną gęstość widmową mocy należy tu pomnożyć przez czynnik $\frac{\pi}{2}$ -oraz przez szerokość połokową rezonansu układu. Takie postawienie zagadnienia jak wyżej uwalnia nas od trudnych rozważań teorii drgań przypadkowych, a jedynie zmusza do wyznaczenia gęstości widmowej mocy G . Przy naszych uproszczeniach typu biały szum pasmowy jest to proste, co zobrazowano również na rysunku 4.17.

Jeśli $\overline{F^2}$ jest średnim kwadratem siły wymuszającej mającej płaskie widmo do ω_1 , to gęstość widmowa w modelu białego szumu pasmowego będzie $G = \frac{\overline{F^2}}{\omega_1}$ lub matematyczna $G_0 = \frac{\overline{F^2}}{2\omega_1}$

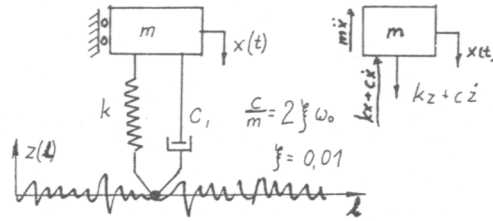
Tak więc obliczenie amplitudy odpowiedzi lub jej kwadratu według (4.38 - 4.40) nie powinno sprawić trudności.

Przykład. Średni kwadrat nierówności profilu drogi wynosi $\overline{z^2} = 2\text{mm}^2$ i można je uważać za biały szum pasmowy w paśmie $0 \div 10$ Hz. Znaleźć amplitudę średniokwadratową nadwozia przy założeniu częstości rezonansowej nadwozia na resorach 2 Hz i awarii tłumików ($\xi = 0,01$) oraz synchronicznego ruchu wszystkich czterech kół po profilu drogi.

Rozwiązanie: Model jak na rysunku 4.18. Zastępcza siła wymuszająca działająca na masę nadwozia jest $F(t) = kz + c\dot{z} = k(z + 2\xi \dot{z}/\omega_0) \cong kz$ bo $\xi = 0,01$ przy awarii tłumików w amortyzatorach. Wobec tego:

$$\overline{F^2} = k^2 \overline{z^2} = G \omega_1, \quad \omega_1 = 2\pi \cdot 10.$$

$$G = \frac{k^2 \overline{z^2}}{\omega_1} = \frac{k^2 \cdot 2}{2\pi \cdot 10} = 0,1 \frac{k^2 \text{ mm}^2}{\text{H}}.$$



Rys.4.18. Uproszczony model pojazdu w ruchu po nierównościach

W takim razie zastępcze wymuszenie:

$$\left(\overline{F_{\text{RMS}}^2} \right)_{\text{zast}} = \frac{\pi \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot 2 \xi \cdot G}{2} = \frac{\pi \cdot 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 0,02 \cdot 0,1 \cdot k^2}{\pi} = \pi \cdot 0,2 \cdot 0,02 \cdot k^2.$$

I wreszcie średni kwadrat przemieszczenia nadwozia wg (4.39)

$$\overline{x_{\text{przyp}}^2} = \left(\overline{F_{\text{RMS}}^2} \right)_{\text{zast}} \frac{1}{4 \xi^2 k^2} = \frac{\pi \cdot 0,2 \cdot 0,02 \cdot k^2}{4 \cdot (0,02)^2 \cdot k^2} = \frac{\pi}{0,04} = 78,5 \text{ mm}^2.$$

Wobec tego ostatecznie

$$x_{\text{RMS przyp.}} = \sqrt{\overline{x_{\text{przyp}}^2}} = \sqrt{78,5} = 9,8 \text{ mm}.$$