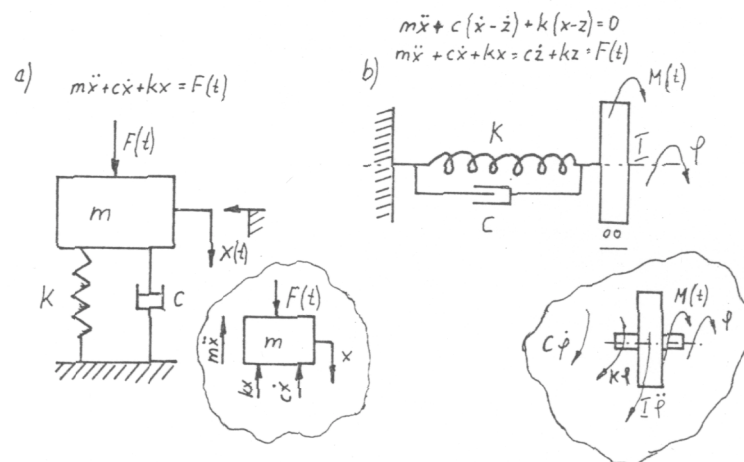


### 3.DRGANIA SWOBODNE MODELU O JEDNYM STOPNIU SWOBODY(JSS)

#### 3.1. DRGANIA TRANSLACYJNE I SKRĘTNE WYMUSZME SIŁOWO I KINEMATYCZNIE

W poprzednim punkcie o modelowaniu doszliśmy do przekonania, że wielokrotnie model obiektu sprowadza się do elementarnego modelu drgającego o jednym stopniu swobody (JSS). Weźmy więc pod uwagę taki model z wymuszeniem siłowym lub momentowym, jak na rysunkach 2.3, 2.4, 2.5. Przy okazji pompy drgającej skrętnie z rysunku 2.5 może powstać pytanie czy wnioski i sposób analizy dla drgań skrętnych będą takie same jak dla drgań typu translacyjnego. Weźmy więc pod uwagę model o JSS translacyjny (rys. 2.4) oraz skrętny (rys. 2.5) i napiszmy równania ruchu.



Rys.3.1. Modele układów o JSS dla drgań translacyjnych (a), oraz skrętnych (b), przed i po uwolnieniu z więzów

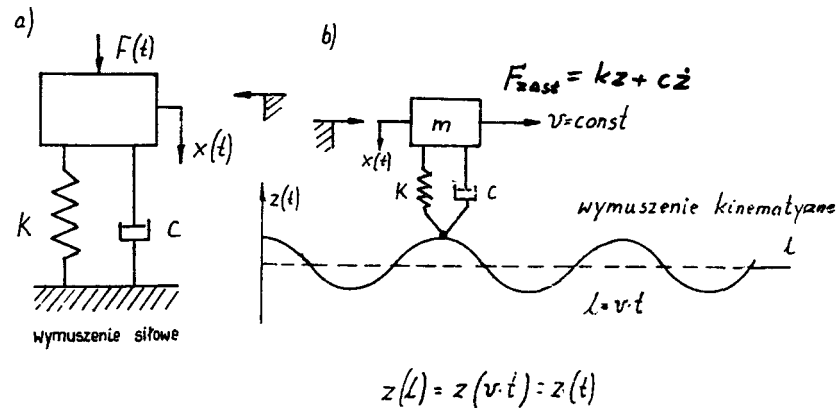
Stosując zasadę d'Alemberta dla każdego z modeli otrzymamy:

|                | <u>model translacyjny (a)</u>           | <u>model skrętny (b)</u>                                  |
|----------------|---|---|
| rzut na        |   |   |
| kierunek ruchu | $\sum F_i + F_{\text{bezwł}} = 0,$      | $\sum M_i + M_{\text{sił bezwł}} = 0,$                    |
|                | $F(t) - kx - c\dot{x} - m\ddot{x} = 0,$ | $M(t) - K\varphi - C\dot{\varphi} - I\ddot{\varphi} = 0,$ |

$x(t) = X(t) - x_0(t) = X(t) - v \cdot t$  oraz  $\varphi(t) = \Phi(t) - \varphi_0(t) = \Phi(t) - \omega \cdot t$ . Jako ilustrację techniczną obu przypadków można przedstawić: dla drgań translacyjnych na torze wzdłużnym ruch oscylacyjny pociągu drogowego lub kolejowego jadącego ze stałą prędkością, zaś dla drgań skrętnych  $\varphi(t)$  będzie oznaczało chwilowe skrócenie linii napędowej maszyny obracającej się ze stałą średnią prędkością kątową  $\omega = 2\pi n/60 = \text{const.}$ .

To przydługie wyjaśnienie słuszne nie tylko dla modelu o JSS pozwoli nam w przyszłości uniknąć stalego powtarzania wniosków dla ruchu translacyjnego i skrętnego. Dla tej samej ogólności rozważań poświęcimy jeszcze kilka chwil wymuszeniu siłowemu oraz wymuszeniu kinematycznemu. W pierwszym przypadku wymuszenie pochodzi od zadanej zewnętrznie siły bądź momentu (patrz rys. 3.1,  $F(t)$ ,  $M(t)$ ), natomiast w drugim przypadku mamy zadany zewnętrznie ruch na torze.

Jak się okazuje oba przypadki wymuszenia są modelowo równoważne co jasno wynika z rysunku 3.2.



Rys.3.2. Ilustracja równoważności wymuszenia siłowego (a) i kinematycznego (b)

Jak widać z rysunku zadane przemieszczenie  $z(t)$  działając poprzez sprężynę  $k$  i tłumik  $c$  jest źródłem siły równoważnej  $F(t)$ ,  $F(t) = kz + cz$ . Wiedząc o tym możemy nasze dalsze rozważania ograniczyć do drgań translacyjnych z wymuszeniem siłowym, a wnioski przenosić na dowolny ruch z dowolnym typem wymuszenia.

### 3.2. DRGANIA SWOBODNE BEZ TŁUMIENIA

Załóżmy w naszych rozważaniach, że efekty działania sił oporu ( $c \dot{x}$ ) nie są dla nas istotne, stąd też można dalej przyjąć, że współczynnik oporu niesprężystego  $c$  jest bliski zera,  $c \sim 0$ . W takim razie z równania (3.1) będziemy mieli:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + kx &= 0, & \ddot{x} + \frac{k}{m}x &= 0, \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x &= 0, & \omega_0 &= \sqrt{k/m}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Jest to równanie różniczkowe liniowe II-go rzędu jednorodne, a jego rozwiązanie ma postać ogólną  $x = A e^{rt}$  r- wykładnik charakterystyczny.

Szukając wartości tego wykładnika poprzez wstawienie rozwiązania do (3.2) mamy:

$$r^2 + \omega_0^2 = 0, \quad r_{1,2} = \pm i \omega_0, \quad i = \sqrt{-1}$$

oraz

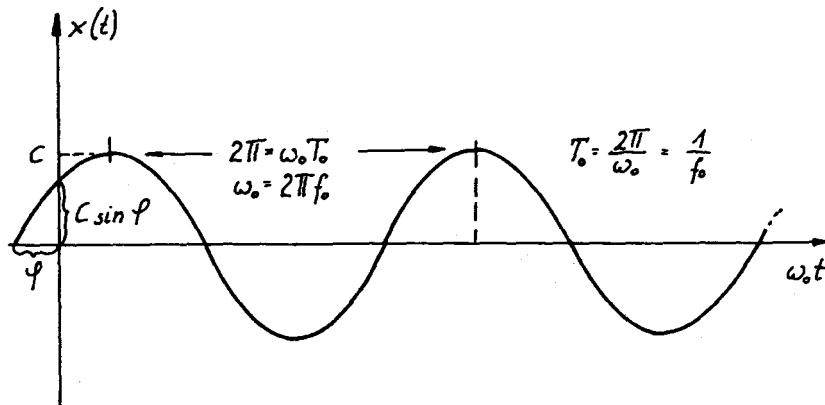
$$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t}. \quad (3.3)$$

Jeśli podstawimy  $A_1 = (A+B)/2$ ,  $A_2 = (A-B)/2$ , to po przekształceniach będziemy mieli:

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t. \quad (3.4)$$

Zakładając warunki początkowe ruchu  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = v_0$ , znajdziemy

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t = \\ &= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \sin(\omega_0 t + \varphi) = C \sin(\omega_0 t + \varphi), \end{aligned} \quad (3.5)$$



Rys.3.3. Graficzna interpretacja rozwiązania równania drgań swobodnych bez tłumienia,  $C$  - amplituda szczytowa drgań,  $\varphi$  - przesunięcie fazowe

Biorąc pod uwagę rozwiązanie (3.5) oraz jego interpretację graficzną możemy przedstawić następujące wnioski:

1° Ruch swobodny układu elementarnego bez tłumienia przedstawia

oscylacje o częstości  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  określonej całkowicie sprężystości  $k$  i bezwładnością  $m$  modelu.

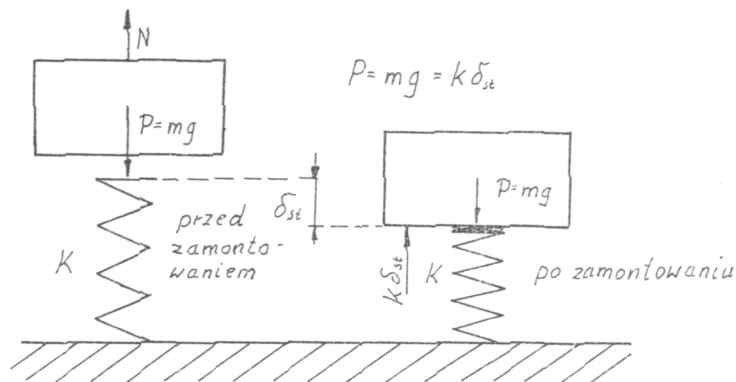
Częstość drgań mierzona jest w rad/sek i łączy się z okresem drgań własnych  $T_0$  [sec] oraz częstotliwością  $f$  [Hz], gdyż jak wiadomo

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \quad , \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

2° Amplituda ruchu własnego  $C$  określona jest całkowicie przez warunki początkowe ruchu  $x_0$  ,  $v_0$  oraz częstość drgań własnych  $\omega_0$ , co również określa przesunięcie fazowe drgań  $\phi$  .

3° Na skutek nieuwzględnienia tłumienia drgania w układzie nie zanikają, stąd też model dokładniejszy musi uwzględnić zjawisko dyssypacji energii.

Spróbujmy obecnie wykorzystać do celów technicznych nabytą wyżej wiedzę o drganiach swobodnych obiektów mechanicznych. Częstość drgań własnych  $f_0$  determinowana jest masą i sztywnością obiektu, zaś w wielu przypadkach elastycznego montażu, gdzie częstość ta jest istotna, znamy jedynie ugięcie statyczne pod wpływem ciężaru własnego obiektu. Modelowo sytuacja wygląda jak na rysunku 3.4. Wnioskując z rysunku 3.4 i wzoru na częstość drgań  $f$  mamy:



Rys.3.4. Schemat zależności geometrycznych i siłowych przy elastycznym montażu masy o ciężarze  $P = mg$  na sprężynach o zastępczej sztywności  $k$  jako ilustracja wzoru Geigera  $f_0 = 5/\sqrt{\delta_{st}}$ , Hz, ( $[\delta_{st}] = \text{cm}$ )

Przykład 1. Zespół wentylacyjny zamontowano elastycznie na czterech amortyzatorach, które ugięły się pod ciężarem zespołu o  $\sigma_{st} = 1\text{cm}$ . Znaleźć częstotliwość drgań własnych amortyzowanego zespołu. Odpowiedź

$$f_0 = \frac{5}{\sqrt{1}} = 5\text{Hz}$$

Przykład 2. Belka suwnicy mostowej ugięła się o  $\sigma_{st} = 0,1\text{cm}$  pod wpływem podnoszonego ciężaru znacznie większego od ciężaru suwnicy. Określić częstotliwość drgań własnych. Odpowiedź

$$f_0 \cong 15,8\text{Hz}$$

### 3.3. DRGANIA SWOBODNE TŁUMIONE

Analizowany wyżej model sprężysto-inercyjny może być stosowany, jeśli chodzi nam o wyznaczenie częstotliwości drgań własnych  $f_0$ , początkowej amplitudy drgań własnych, oraz ogólnie drgań w ramach kilku okresów po rozpoczęciu ruchu. Jednak dla dłuższego czasu obserwacji drgań między zachowaniem się naszego modelu a rzeczywistością pojawia się zasadnicza różnica:

ruch modelowy nie zanika z czasem. Przejdźmy więc do analizy zachowania się modelu pełnego; sprężysto-inercyjnego z dyssypacją,  $c \neq 0$ . Wychodząc z (3.1) mamy tu przy  $F(t) \equiv 0$ :

$$\begin{aligned}
\ddot{x} + 2h \dot{x} + \omega_0^2 x &= 0, \quad x = Ae^{rt}, \\
r^2 + 2hr + \omega_0^2 &= 0, \\
r_{1,2} &= -h \pm \sqrt{h^2 - \omega_0^2}, \\
x(t) &= A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Analizując uważnie znalezione pierwiastki charakterystyczne  $r_{1,2}$  można powiedzieć, że wyznaczają one trzy obszary zachowania się modelu, zależnie od wartości współczynnika tłumienia  $h$ ; mianowicie  $h > \omega_0$ ,  $h = \omega_0$ ,  $h < \omega_0$

Dla udogodnienia dalszej analizy wprowadźmy bezwymiarowy stopień tłumienia  $\xi$ , który spełnia relacje:

$$\xi = \frac{c}{c_{kr}} = \frac{h}{\omega_0} \quad \text{oraz} \quad c = c_{kr} = 2\sqrt{mk}, \quad \text{gdy} \quad \xi = 1. \tag{3.9}$$

Analizując uważnie znalezione pierwiastki charakterystyczne  $r_{1,2}$  można powiedzieć, że wyznaczają one trzy obszary zachowania się modelu, zależnie od wartości współczynnika tłumienia  $h$ ; mianowicie  $h > \omega_0$ ,  $h = \omega_0$ ,  $h < \omega_0$

Dla udogodnienia dalszej analizy wprowadźmy bezwymiarowy stopień tłumienia  $\xi$ , który spełnia relacje:

$$\xi = \frac{c}{c_{kr}} = \frac{h}{\omega_0} \quad \text{oraz} \quad c = c_{kr} = 2\sqrt{mk}, \quad \text{gdy} \quad \xi = 1. \tag{3.9}$$

$$c > c_{kr}, (\xi > 1); x = A_1 e^{(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_0 t} + A_2 e^{(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_0 t}$$

tłumienie krytyczne:

$$c = c_{kr}, (\xi = 1); x = (A_1 + A_2 t)e^{-\xi\omega_0 t} \quad (3.10)$$

tłumienie podkrytyczne:

$$c < c_{kr}, (\xi < 1); x = A_1 e^{(-\xi - i\sqrt{1-\xi^2})\omega_0 t} + A_2 e^{(-\xi + i\sqrt{1-\xi^2})\omega_0 t}$$

Patrząc na przedstawione rozwiązania można stwierdzić, że w każdym wypadku mamy:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad \text{gdy } t \rightarrow \infty \quad (3.11)$$

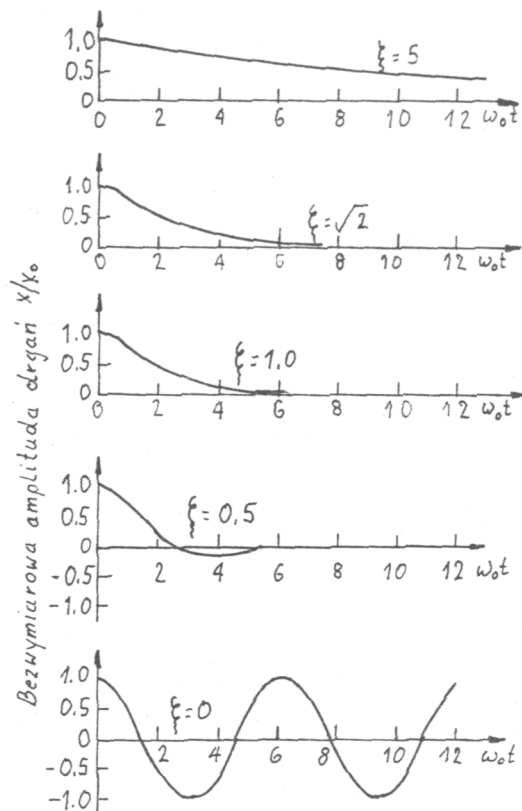
Tak więc zasadnicza niezgodność jakościowa modelu z poprzedniego punktu została naprawiona.

Jeśli zaś chodzi o ilustrację graficzną rozwiązań (3.10), to jakościowo przedstawiono ją na rysunku

3.5 dla różnych  $\xi = \text{var}$ .

Patrząc na techniczną aplikację rozwiązań (3.10) można powiedzieć, że tłumienie nadkrytyczne układów drgających ma zastosowanie w konstrukcji różnego typu indykatorów wskazówkowych. Jaskrawym przykładem jest tu galnometr balistyczny stosowany do pomiaru ładunku elektrycznego.

Układy amortyzacji np. samochodów i innych pojazdów należą do przypadków tłumienia podkrytycznego  $\xi < 1$ , lecz o dużej specjalnie dobieranej wartości tłumienia. Przybliżony test sprawdzenia amortyzatorów samochodu dopuszcza nie więcej niż dwa wahnięcia po wyprowadzeniu z położenia równowagi. Tak więc



Rys.3.5. Ruch modelu z tłumieniem dla różnych  $\xi = \text{var.}$ , przy warunku początkowym  $x_0 \neq 0$ ,  $v_0 = 0$ , we współrzędnych bezwymiarowych [13]

jest to ruch już naprzemienny,  $\xi < 1$ , z co najmniej jednym przejściem przez położenie równowagi.

Materiały konstrukcyjne, zwłaszcza metale np. stal, duraluminium, cechują się bardzo małym stopniem tłumienia  $\xi \ll 1$ , rzędu 0,01 i mniej. Stąd też maszyny, urządzenia i instalacje skonstruowane z takich materiałów będą się cechowały słabym zanikiem drgań własnych z wystąpieniem wszystkich niekorzystnych aspektów drgań omawianych w rozdziale 1. Ta sytuacja dużej podatności na drgania konstrukcji mechanicznych jest głównym powodem wprowadzenia nauki o drganiach do programu studiów.

Z powyższego wynika, że dalej będziemy się już zajmowali przypadkiem tłumienia podkrytycznego  $\xi < 1$ . Stąd też biorąc pod uwagę ten przypadek w (3.10) przedstawimy stałe  $A_1$  i  $A_2$  w funkcji warunków początkowych  $x_0$ ,  $v_0$  w zapisie rzeczywistym:



$$x(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \left[ x_0 \cos \omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t + \frac{v_0 + \xi \omega_0 x_0}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t \right]$$

lub

(3.12)

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + \xi \omega_0 x_0)^2}{\omega_0^2 (1-\xi^2)}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t + \psi) = D e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t + \psi),$$

gdzie  $\xi < 1$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ,  $\operatorname{tg} \psi = \frac{x_0 \omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}{v_0 + \xi \omega_0 x_0}$ ,

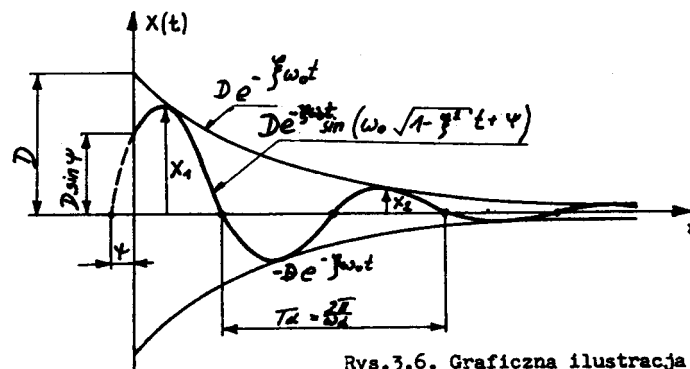
$$D = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + \xi \omega_0 x_0)^2}{\omega_0^2 (1-\xi^2)}}.$$

Jak widać uzyskaliśmy drgania tłumione o parametrach:

(3.13)

$$\begin{aligned} \omega_d &= \omega_0 \sqrt{1-\xi^2}, & f_d &= \frac{\omega_0}{2\pi} \sqrt{1-\xi^2} \\ T_d &= \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}, & \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}}, \\ \xi &= \frac{c}{2\sqrt{km}}. \end{aligned}$$

Tak więc z tytułu dyssypacji oprócz efektu zanikania drgań uzyskaliśmy również zmniejszenie częstości i częstotliwości drgań  $\omega_d, f_d$ . Przedstawiając zaś ostatecznie rozwiązanie (3.12) graficznie będziemy mieli jak na rysunku 3.6.



Rys.3.6. Graficzna ilustracja kinematyki drgań swobodnych z tłumieniem ( $\xi \neq 0$ )

Jak widać z rysunku przebieg drgań tłumionych mieści się w obwiedni utworzonej przez funkcje  $\pm e^{-\xi\omega_0 t}$ .

Do celów porównawczych, a przede wszystkim aplikacji technicznych, koniecznym jest wprowadzenie miary tłumienia. Taką miarę może dać porównanie obu sąsiednich wychyleń w tę samą stronę. Jeśli na rysunku 3.6 rozpoczniemy rachubę czasu od pierwszego dodatniego maksimum  $x_1$  to zapis drgań zanikających będzie:

$$x = x_1 e^{-\xi \omega_0 t} \cos \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t,$$

$$x(0) = x_1.$$

zaś kolejne wychylenie  $x_2$  można otrzymać jako:

$$x_2 = x(T_d) = x_1 e^{-\xi \omega_0 T_d} \cos \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} T_d.$$

Obliczając w ten sposób iloraz dwu kolejnych wychyleń dowolnie oddalonych od początku rachuby czasu mamy:

$$\delta_t = \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{x_1 e^{-\xi \omega_0 n T_d} \cos \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} n T_d}{x_1 e^{-\xi \omega_0 (n+1) T_d} \cos \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} (n+1) T_d},$$

a po uproszczeniach wynikających z okresowości funkcji cosinus otrzymamy wyrażenie na tzw. dekrement tłumienia  $\delta_t$ :

$$\delta_t = \frac{x_n}{x_{n+1}} = e^{\xi \omega_0 T_d}. \quad (3.14)$$

Naturalnym uproszczeniem będzie tu operacja logarytmu naturalnego dająca tzw. logarytmiczny dekrement tłumienia  $\Delta$ :

$$\Delta = \ln \delta_t = \ln e^{\xi \omega_0 T_d} = \xi \omega_0 T_d =$$

$$= \frac{\xi \omega_0 2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{2\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (3.15)$$

oraz dla  $\xi < 0,1$ :

$$\ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = \Delta \approx 2\pi \xi.$$

Tak więc dla większości obiektów spotykanych w inżynierii mechanicznej ( $\xi < 0,1$  istnieje

prosty związek między stopniem tłumienia a wielkością bezpośrednio mierzalną z eksperymentu czyli logarytmicznym dekrementem tłumienia.

Przykład 1. Podczas testu drgań swobodnych tylnego zawieszenia samochodu zaobserwowano średnie stosunki dwu kolejnych wychyleń:

$\frac{x_1}{x_0} = 0,5$  dla lewego koła oraz  $\frac{x_1}{x_0} = 0,6$  dla prawego. Znaleźć logarytmiczny dekrement

tłumienia oraz stopień tłumienia zawieszenia każdego z kół

Odpowiedź:

$$\text{K o ł o l e w e : dekrement } \delta_t = \frac{x_0}{x_1} = 2$$

$$\text{log. dekrement } \Delta = \ln \frac{x_0}{x_1} = 0,693$$

$$\text{stopień tłumienia } \xi = \frac{\Delta}{2\pi} = 0,110 ,$$

$$\text{K o ł o p r a w e : dekrement } \delta_t = \frac{x_0}{x_1} = 1,666$$

$$\text{log. dekrement } \Delta = \ln \frac{x_0}{x_1} = 0,51$$

$$\text{stopień tłumienia } \xi = \frac{\Delta}{2\pi} = 0,881 .$$

Jak widać stopień tłumienia drgań zawieszenia obu kół jest mały.

Przykład 2. Ciężar podniesiony przez suwnicę buja się na linie z częstotliwością

$$f_d = 1 \text{ Hz, a po dwudziestu wahaniciach amplituda maleje o połowę } \frac{x_0}{x_{20}} = \frac{1}{0,5}$$

Obliczyć parametry  $f_0, \omega_0, h, \xi$ .

Rozwiązanie:

a) tłumienie z (3.15) po 20 okresach

$$\frac{x_0}{x_{20}} = \frac{1}{0,5} = 2$$

oraz

$$\frac{x_0}{x_{20}} = e^{20\xi\omega_0 T_d} = 2,$$

$$20 \frac{\xi \omega_0 2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}} = \ln 2 = 0,693,$$

$$\frac{40\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = 0,693 \Rightarrow \xi = 0,06.$$

b) c z ę s t o t l i w o ść , częstość drgań swobodnych nietłumionych dane  $f_d = 1$  Hz, stąd  $\omega_d = 2\pi f_d$ . Wiemy że

$$f_d = f_0 \sqrt{1-\xi^2} \text{ Hz} \text{ oraz } \omega_d = \omega_0 \sqrt{1-\xi^2} \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Ponieważ przy tych danych  $\sqrt{1-\xi^2} = \sqrt{1-0,06^2} = 0,998 \approx 1$ ,

to możemy przyjąć  $f_0 \approx f_d$ ,  $\omega_0 \approx \omega_d$ .

c) w s p ó ł c z y n n i k t ł u m i e n i a , wiemy że

$$h = \xi \omega_0 = 0,06 \cdot 2\pi = 0,377 \frac{\text{rad}}{\text{sek}}.$$