



## Ćwiczenie nr 5

### Redukcja momentów bezwładności do określonego punktu redukcji

#### Cel ćwiczenia:

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie zredukowanego momentu bezwładności dla przekładni zębatej. Student, przygotowując się i potem wykonując ćwiczenie, uczy się posługiwać nabytą we wcześniejszych latach nauki znajomością podstawowych pojęć i twierdzeń dotyczących dynamiki ruchu obrotowego ciała sztywnego. Poza tym, dzięki wyborowi obiektu jakim jest przekładnia, ćwiczenie jest pewnym elementarnym wprowadzeniem w tematykę zagadnień technicznych, które student będzie musiał opanować w toku dalszych studiów.

#### Wyposażenie stanowiska:

Podstawowym składnikiem wyposażenia stanowiska ćwiczeniowego jest model przekładni. Dodatkowym wyposażeniem jest suwmiarka i przymiar milimetrowy.

#### Literatura:

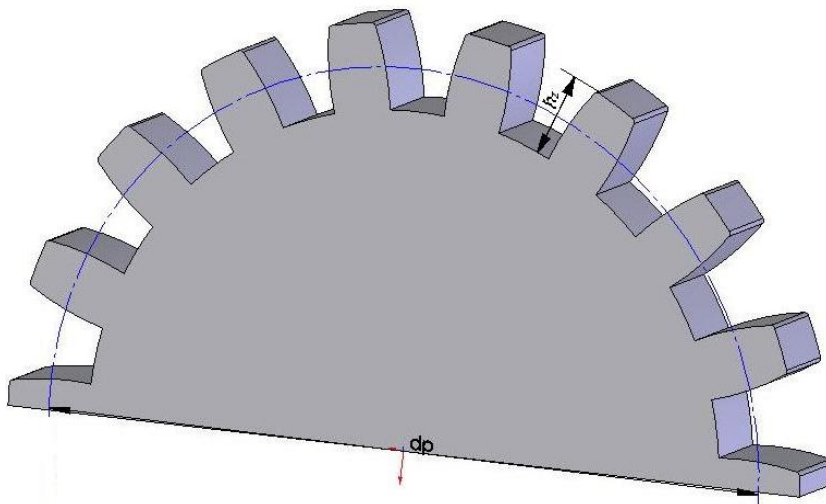
1. J. Leyko, Mechanika ogólna, tom II, PWN Warszawa.
2. J. Misiak, Mechanika ogólna, tom II Dynamika, WNT Warszawa.
3. Mały poradnik mechanika. Część trzecia, rozdz. IIIc.

#### Zagadnienia kontrolne:

1. Zasada krętu.
2. Wzór na energię kinetyczną w ruchu obrotowym.
3. Wyprowadzenie równania różniczkowego ruchu obrotowego ciała sztywnego.
4. Rozwiązanie równania różniczkowego ruchu obrotowego dla przypadku  $M_z = \text{const.}$  i  $I_z = \text{const.}$   
Interpretacja rozwiązania. Analogie między ruchem postępowym i obrotowym.
5. Definicja prędkości kątowej i przyspieszenia kątowego, definicja przełożenia „i”.

#### Przebieg ćwiczenia:

1. Zmierzyć wysokość zębów oraz grubość kół zębatach. Wyniki umieścić w tabeli 1.
2. Policzyc ilość zębów poszczególnych kół zębatach. Wyniki umieścić w tabeli 1.



$$d_p = \frac{z \cdot h_z}{2,1} [mm]$$

gdzie:

$d_p$  – średnica podziałowa,  
 $z$  – ilość zębów,  
 $h_z$  – wysokość zęba.

Rys. 1. Koło podziałowe.

3. Koła zębate należy przybliżyć jako pełne koła o zewnętrznej średnicy podziałowej  $d_p$ . Średnicę podziałową (rys.1) należy wyznaczyć poprzez obliczenie modułu, przyjmując, że zęby są normalne oraz, że luz wierzchołkowy wynosi 0,1 modułu (patrz literatura punkt 3). W opracowaniu należy przedstawić sposób obliczenia momentu bezwładności, przyjmując gęstość materiału, z którego wykonane są koła zębate, jak dla stali. Wyniki umieścić w tabeli 1.
4. W tabeli 2 wykonać schematycznie rysunki położeń kół zębatach na poszczególnych biegach.
5. Ustalić przełożenie „i” na poszczególnych biegach i wpisać do tabeli 2.
6. Wyprowadzić wzory na zredukowane momenty bezwładności na poszczególnych biegach, traktując wał jako bezmasowy w odcinkach między kołami. Wyniki umieścić w tabeli 2. Prowadzący zajęcia ustala sposób redukcji: do prędkości kątowej wejściowej, prędkości kątowej wału pośredniego bądź do prędkości kątowej sprzęgła.

**Tabela 1** Dane dla poszczególnych kół przekładni

Numer koła	Wysokość zębów $h_z$ [mm]	Grubość koła zębatego $b$ [mm]	Liczba zębów $z$	Średnica podziałowa $d_p$ [mm]	Moment bezwładności koła $I$ [kg*m <sup>2</sup> ]
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					

**Tabela 2** Wartości zredukowanych momentów bezwładności

Rodzaj biegu	Schematyczny rysunek położeń kół zębatach	Przełożenie „i”	Wzór na zredukowany moment bezwładności $I_z$	Wartość zredukowanego momentu bezwładności $I_z$ [kg*m <sup>2</sup> ]
Wsteczny				
Pierwszy				
Drugi				
Trzeci				

LABORATORIUM MECHANIKI I WIBROAKUSTYKI  
INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ POLITECHNIKI POZNAŃSKIEJ

Nr ćwiczenia

Instrukcja do ćwiczenia pt.:  
REDUKCJA MOMENTU BEZWADNOŚCI UKŁADU MAS  
W RUCHU OBROTOWYM

Cel ćwiczenia

Bezpośrednim celem ćwiczenia jest wyznaczenie zredukowanego momentu bezwładności dla przekładni zębatej. Student, przygotowując się i potem wykonując ćwiczenie, uczy się posługiwać znajomością podstawowych pojęć i twierdzeń dotyczących dynamiki ruchu obrotowego ciała sztywnego. Poza tym, dzięki wyborowi obiektu jakim jest przekładnia, ćwiczenie jest pewnym elementarnym wprowadzeniem w tematykę zagadnień technicznych, które student będzie musiał opanować w toku dalszych studiów.

Wyposażenie stanowiska

Podstawowym składnikiem wyposażenia stanowiska ćwiczeniowego jest model przekładni. Opis jego znajduje się w części 2 instrukcji. Poza tym, potrzebne będą: suwmiarka i pryzmiar milimetrowy.

Lektura:

- [1] J. Leyko, Mechanika ogólna. Tom II, rozdz. VII, IX, X, XI.
- [2] St. Wiśniewski, Dynamika maszyn. Rozdz. 4, § 5.
- [3] Mały poradnik mechanika. Część trzecia, rozdz. IIIc.

Zagadnienia kontrolne

Student przystępujący do ćwiczenia powinien umieć zreferować następujące zagadnienia:

1. Zasada krętu.
2. Wyprowadzenie równania dynamicznego ruchu obrotowego ciała sztywnego.
3. Rozwiązanie równania dynamicznego ruchu obrotowego dla przypadku  $M_z = \text{const}$  i  $I_z = \text{const}$ . Interpretacja rozwiązania. Analogie między ruchem postępowym i obrotowym.
4. Definicja prędkości kątowej i przyspieszenia kątowego, definicja prędożeń "i".
5. Wzór na energię kinetyczną w ruchu obrotowym.



6. Wyprowadzenie wzorów na pracę i moc w ruchu obrotowym. Jednostki pracy i mocy w układzie SI.
7. Określenie pojęcia masowego momentu bezwładności. Interpretacja fizyczna na tej wielkości.
8. Zasada redukcji momentów bezwładności układu mas w ruchu obrotowym.
9. Przykłady zastosowań zredukowanego momentu bezwładności.

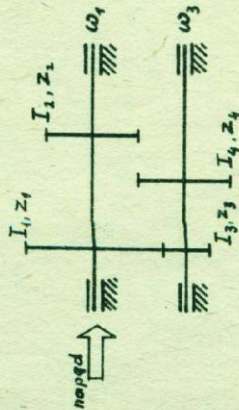
### 1. Podstaw teoretyczne

#### 1.1. Sprecyzowanie zagadnienia

W wielu zagadnieniach praktycznych rozruchu urządzeń konstruktor staje wobec problemu odpowiedniego projektowania rozkładu wirujących mas. Motywacja tego problemu tkwi w tym, że przyrost prędkości kątowej w pewnym czasie jest odwrotnie proporcjonalny do momentu bezwładności. Chcąc doprowadzić jak najprędzej układ wirujących mas do pewnej prędkości kątowej, należy minimalizować moment bezwładności. Omawiane układy, jak np. reduktory są układami skomplikowanymi. Dlatego ważne jest, aby przybliżać im jedną miarę bezwładności. Taką jedną miarę bezwładności całego układu mas w ruchu obrotowym nazywamy zredukowanym momentem bezwładności.

#### 1.2. Redukcja momentów bezwładności układu mas w ruchu obrotowym

Zasada redukcji momentów bezwładności układu mas w ruchu obrotowym polega na tym, że energia kinetyczna wirujących mas powinna być równa energii kinetycznej zredukowanego koła.



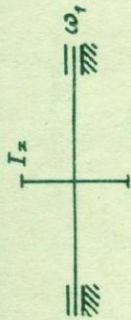
Rys.1. Schemat przekładni składającej się z czterech kół zębatach

Zilustrujemy to na następującym przykładzie: Należy dokonać redukcji momentów bezwładności mas w ruchu obrotowym dla układu przedstawionego na rys.1. Na rys.1 jest przedstawiony rozgałęziony układ czterech wirujących kół zębatach, odpowiednio o momentach bezwładności  $I_1, I_2, I_3, I_4$  oraz ilości zębów  $z_1, z_2, z_3, z_4$ . Zakładanie występuje dla kół: pierwszego i trzeciego.

Stąd, przełożenie

$$i = \frac{z_1}{z_3} = \frac{\omega_3}{\omega_1}.$$

rozpatrywanym przypadku układ zredukowany ma postać przedstawioną na rys.2.



Rys.2. Schemat układu zredukowanego dla przykładu z rys.1

Energia kinetyczna kół przed redukcją musi być równa energii kinetycznej zredukowanego koła, a zatem:

$$\frac{1}{2} I_2 \omega_1^2 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_1^2 i^2 + \frac{1}{2} I_4 \omega_1^2 i^2.$$

Stąd:

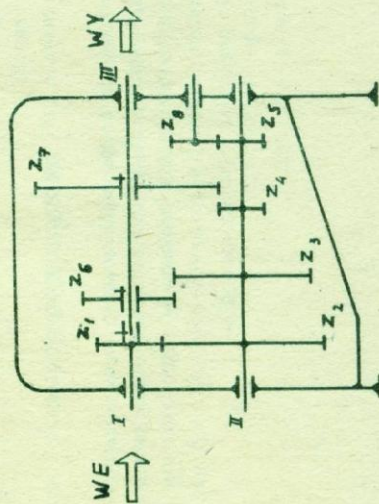
$$I_z = I_1 + I_2 + (I_3 + I_4) i^2.$$

gdzie  $I_z$  jest momentem bezwładności zredukowanego koła.

Zredukowaliśmy zatem momenty bezwładności kół zębatach w ruchu obrotowym. Rozważania powyższe zastosujemy do obliczenia zredukowanych momentów bezwładności kół zębatach w "skrzyni biegów" dla biegów: wstępnego, pierwszego, drugiego i trzeciego.

### 2. Opis stanowiska doświadczalnego

Stanowisko doświadczalne jest modelem przekładni zębatej stosowanej w pojazdach. Składa się ona z ośmiu kół. Pozwala ona na uzyskiwanie czterech przełożeń (wsteczny, pierwszy, drugi, trzeci). Korba symbolizuje napęd przekładni z tarza na wyjściu przekładni np. tarczą sprzęgła.

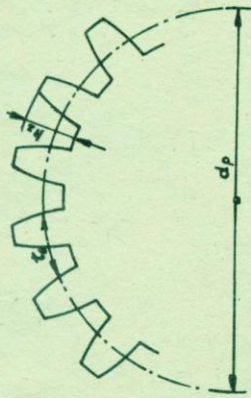


Rys.3. Schemat modelu skrzyni biegów. I - wał wejściowy, II - wał pośredni, III - wał wyjściowy, z1-z8 - koła zębate



### 3. Sposób wykonania ćwiczenia

- a) Zmierzyć wysokość zębów oraz grubość kół zębatach. Wyniki umieścić w tabeli I.
- b) Policzyc ilość zębów poszczególnych kół zębatach. Wyniki umieścić w tabeli I.



$$d_p = \frac{z \cdot h_z}{2,1} \quad [mm]$$

- Rys.4. Koło podziałowe:  $d_p$  - średnica podziałowa,  $z$  - ilość zębów,  $h_z$  - wysokość zęba,  $t_o$  - podziałka nominalna,  $m_o = \frac{t_o}{\pi}$  - moduł nominalny
- c) Koła zębate należy przybliżyć jako pełne koła o zewnętrznej średnicy podziałowej  $d_p$ . Średnicę podziałową (rys.4) należy wyznaczyć poprzez obliczenie modułu, przyjmując, że zęby są normalne oraz, że luz wierzchołkowy wynosi 0,1 modułu. (Lektura [3]). W opracowaniu należy przedstawić sposób obliczenia momentu bezwładności, przyjmując gęstość materiału, z którego wykonane są koła zębate, dla stali. Wyniki umieścić w tabeli I.
- d) W tabeli II wykonać schematyczne rysunki położenia kół zębatach na poszczególnych biegach.
- e) Ustalić przełożenie "i" na poszczególnych biegach i wpisać do tabeli II.
- f) Wprowadzić wzory na zredukowane momenty bezwładności na poszczególnych biegach, traktując wał jako bezmasowy w odcinkach między kołami. Wyniki umieścić w tabeli II. Prowadzący zajęcia ustala sposób redukcji: do prędkości kątowej wejściowej, prędkości kątowej wału pośredniego bądź do prędkości kątowej sprzęgia.

Tabela I

Dane dla poszczególnych kół przekładni

Numer koła	Wysokość zębów $h_z$ [mm]	Grubość koła zębatego $b$ [mm]	Liczba zębów $z$	Średnica podziałowa $d_p$ [mm]	Moment bezwładności koła $I$ [ $kg \cdot m^2$ ]
1					
2					
3					
.					
.					
8					

Tabela II

Wartości zredukowanych momentów bezwładności

Rodzaj biegu	Schematyczny rysunek położenia kół zębatych	Przełożenie "i"	Wzór na zredukowany moment bezwładności $I_z$	Wartość zredukowanego momentu bezwładności $I_z$ [ $kg \cdot m^2$ ]
Wsteczny				
Pierwszy				
Drugi				
Trzeci				

### 4. Opracowanie wyników

Korzystając z danych otrzymanych analitycznie i doświadczalnie, należy wyliczyć zredukowane momenty bezwładności dla poszczególnych biegów. Wyniki umieścić w tabeli II. Na ich podstawie należy wyciągnąć wnioski dla zastosowań.