

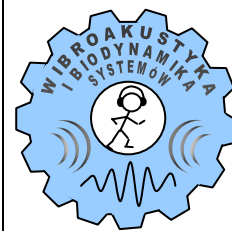


## **LABORATORIUM WIBROAKUSTYKI MASZYN**

**Wydział Budowy Maszyn i Zarządzania**

**Instytut Mechaniki Stosowanej**

**Zakład Wibroakustyki i Bio-Dynamiki Systemów**



### **Ćwiczenie nr 3**

## **WYZNACZANIE PARAMETRÓW DYNAMICZNYCH UKŁADÓW – metodą drgań swobodnych**

### **Cel ćwiczenia:**

- Poznanie zasad modelowania obiektów rzeczywistych – zastąpienie obiektu badanego (belka jedno- lub dwu- wspornikowa z dodatkową masą) modelem fizycznym i matematycznym (układ zastępczy – model fizyczny o jednym stopniu swobody).
- Określenie na drodze analityczno-eksperymentalnej dla każdego z badanych układów parametrów dynamicznych: masy zredukowanej, zastępczego współczynnika tłumienia i zastępczego współczynnika sprężystości.

### **Wypożyczenie stanowiska:**

Stanowisko składa się z dwóch układów:

- a) rzeczywistego układu mechanicznego złożonego z:
  - podstawy umożliwiającej jedno- lub dwustronne mocowanie belek,
  - przymiaru milimetrowego umocowanego na podstawie,
  - kilku belek o różnej grubości,
  - kilku mas mocowanych wymiennie na belkach;
- b) układu pomiarowego zawierającego:
  - piezoelektryczny przetwornik przyspieszeń drgań,
  - miernik drgań ze wzmacniaczem i układem całkującym,
  - oscyloskop,
  - przetwornik analogowo-cyfrowy (A-C),
  - komputer z oprogramowaniem „oscyloskop cyfrowy”.

### **Literatura:**

1. C. Cempel: Drgania mechaniczne. Wprowadzenie, skrypt PP Nr 1163 1984; str. 28-36; 77-94.
2. Z. Osiński: Teoria drgań, PWN Warszawa 1978. str. 79-109, 111-148.
3. Z. Osiński: Tłumienie drgań mechanicznych. PWN Warszawa 1986. str. 18-55.
4. Z. Parszewski: Drgania i dynamika maszyn. WNT Warszawa 1988, str. 33-54.
5. K. Piszczek, J. Walczak: Drgania w budowie maszyn. PWN Warszawa 1982, str. 28-90.

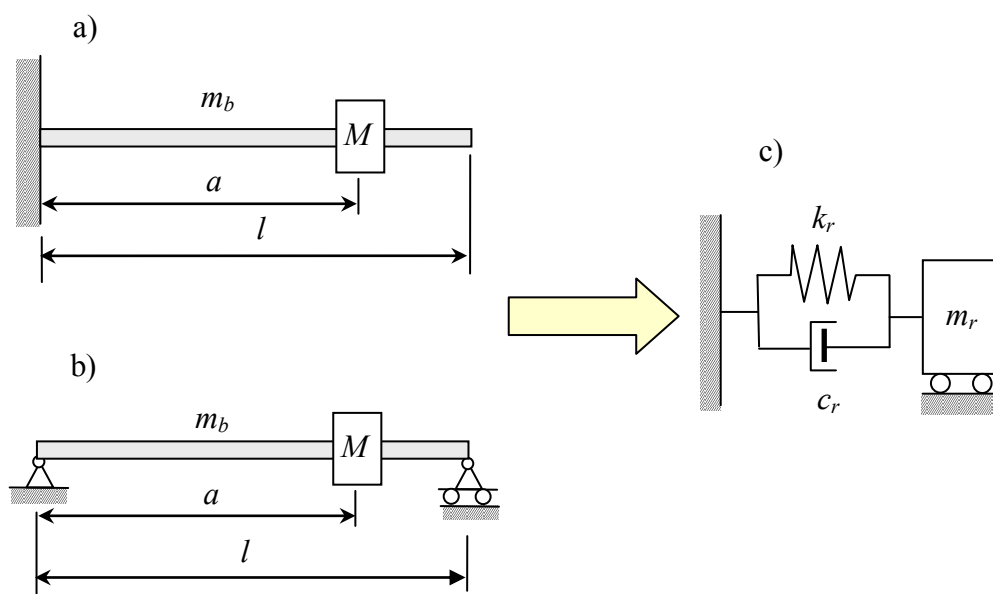
### **Zagadnienia kontrolne:**

1. Zasady modelowania układów rzeczywistych.
2. Znajomość układania równań ruchu dla układów o jednym stopniu swobody.
3. Sposoby rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych liniowych o stałych współczynnikach.
4. Interpretacja parametrów dynamicznych układów.
5. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa układu o jednym stopniu swobody.

## 1. PODSTAWY TEORETYCZNE

W wielu zagadnieniach technicznych np. w zadaniu minimalizacji drgań układów rzeczywistych, przy określeniu bezpiecznego zakresu pracy ze względu na odpowiedź obiektu na występujące wymuszenia (np. siłami w maszynie), przy optymalizacji konstrukcji pod względem wytrzymałościowym i w wielu innych przypadkach, istotna jest znajomość własności dynamicznych obiektów. Duża złożoność budowy wielu układów rzeczywistych powoduje, że również ich modele fizyczne i matematyczne charakteryzują się dużą złożonością. Dlatego też, w pierwszym przybliżeniu, układy takie zastępuje się modelami prostszymi np. układami o jednym lub dwóch stopniach swobody i dla nich określa się parametry dynamiczne.

Rozpatrzmy dwa proste układy mechaniczne przedstawione na rysunku 1a i 1b. W każdym przypadku jest to belka pryzmatyczna o długości  $l$  i masie  $m_b$  z masą skupioną  $M$  zamocowaną w punkcie o współrzędnej  $a$ . Obydwa układy różnią się jedynie warunkami brzegowymi. Obydwa te układy zastąpimy modelem dyskretnym liniowym o jednym stopniu swobody (rysunek 1c) przyjmując, że jedynie możliwy ich ruch to drgania giętne z pierwszą postacią własną.



Rys.1. Rozpatrywane obiekty rzeczywiste – belka pryzmatyczna z masą skupioną:

- a) jednostronnie utwierdzona,
- b) obustronnie przegubowo podparta,
- c) model obiektu rzeczywistego.

W celu określenia parametrów dynamicznych modelu wykorzystamy dwie metody:

- energetyczną tzw. metodę Rayleigh'a dla określenia masy zredukowanej  $m_r$  i sztywności zredukowanej  $k_r$  (metoda analityczna),
- opartą na kryterium równości przemieszczeń drgań swobodnych wybranego punktu obiektu rzeczywistego (punktu redukcji) i modelu dla określenia sztywności zredukowanej  $k_r$  i zredukowanego współczynnika tłumienia  $c_r$  (metoda eksperymentalna).

Z powyższego widać, że masę zredukowaną  $m_r$  możemy określić na podstawie obliczeń numerycznych zaś zredukowany współczynnik tłumienia  $c_r$  na drodze eksperymentalnej. Jedynie zredukowaną sztywność  $k_r$  możemy wyznaczyć na drodze analitycznej, a także przy założeniu znajomości wartości  $m_r$  doświadczalnie.

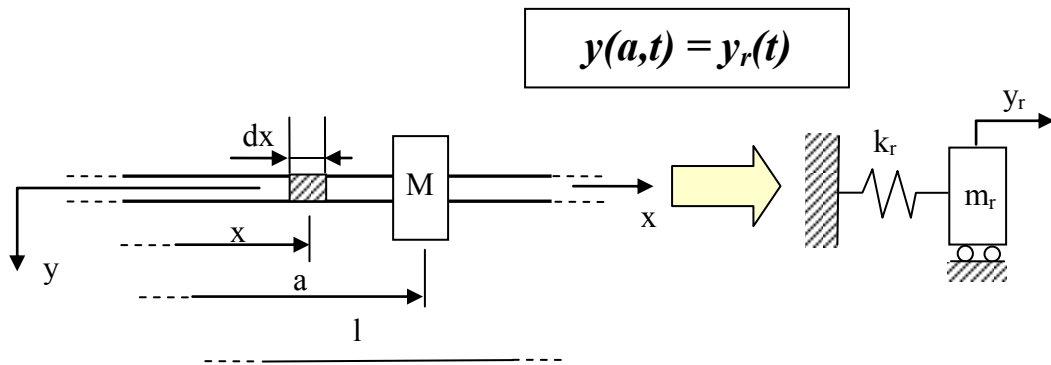
Na początku wykorzystajmy energetyczną metodę modelowania. W metodzie tej zakłada się, że obiekt mechaniczny jest układem zachowawczym, tzn., że nie uwzględniamy strat energii (praktycznie tłumienie jest niewielkie tzn.  $c \approx 0$ ). Wartości  $m_r$  i  $k_r$  wyznaczamy w oparciu o kryterium równości energii kinetycznej  $T$  i energii potencjalnej  $V$ :

$$\begin{aligned} T_{\text{obektu}} &= T_{\text{modelu}} \\ V_{\text{obektu}} &= V_{\text{modelu}} \end{aligned} \quad (1)$$

Zakładając, że belka drga z pierwszą postacią własną, ruch dowolnego punktu belki możemy opisać zależnością:

$$y(x, t) = Y(x) \cos(\omega_0 t) \quad (2)$$

gdzie  $Y(x)$  jest maksymalnym wychyleniem dowolnego punktu belki,  $\omega_0$  jest pierwszą częstotliwością własną.



Rys. 2. Schemat ideowy wykorzystywany przy wyznaczaniu zredukowanych parametrów dynamicznych obiektu mechanicznego metodą energetyczną.

Na podstawie rysunku 2 energię kinetyczną (3a) i potencjalną (3b) belki z masą skupioną i modelu możemy wyrazić następująco:

$$\begin{aligned} T_{\text{obektu}} &= \frac{1}{2} \int_0^l [\rho S + M \delta(x - a)] \left[ \frac{dy(x, t)}{dt} \right]^2 dx, \\ T_{\text{modelu}} &= \frac{1}{2} m_r \left[ \frac{dy(x, t)}{dt} \right]^2_{|x=a} \end{aligned} \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} V_{\text{obektu}} &= \frac{I}{2} \int_0^l EI \left[ \frac{d^2 y(x, t)}{dx^2} \right]^2 dx \\ V_{\text{modelu}} &= \frac{I}{2} k_r [y(x, t)]^2_{|x=a} \end{aligned} \quad (3b)$$

gdzie:

- $\rho$  – gęstość materiału belki w  $[\text{kg}/\text{m}^3]$ ,
- $S$  – pole przekroju poprzecznego w  $[\text{m}^2]$ ,
- $M$  – masa skupiona w  $[\text{kg}]$ ,
- $E$  – moduł Younga materiału belki w  $[\text{N}/\text{m}^2]$ ,
- $I$  – moment bezwładności przekroju poprzecznego belki względem osi obojętnej w  $[\text{m}^4]$ ,
- $m_r$  – masa zredukowana w  $[\text{kg}]$ ,

- $k_r$  – sztywność zredukowana modelu w [N/m],  
 $a$  – położenie masy skupionej i jednocześnie punkt do którego redukujemy własności masowo – sprężyste obiektu rzeczywistego w [m] (w ogólności można wybrać inny punkt obiektu).

$$\delta(x-a) = \begin{cases} \infty & \text{dla } x = a \\ 0 & \text{dla } x \neq a \end{cases} \quad \text{delta Dirac'a}$$

Stąd na podstawie kryterium podobieństwa obiektu rzeczywistego i modelu (1), wykorzystując zależności (2) i (3), otrzymamy:

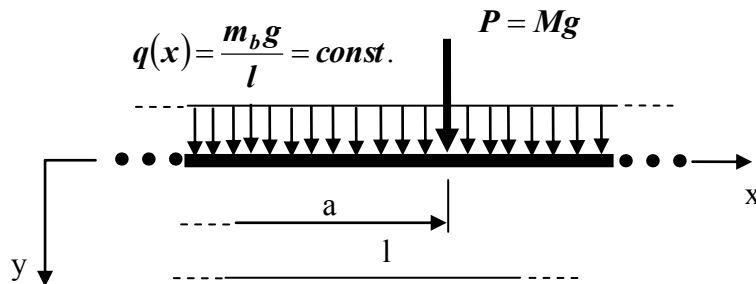
$$m_r = M + \frac{\int_0^l Y^2(x) dx}{l \cdot Y^2(a)} \cdot m_b, \quad m_b = \rho S l, \quad (4)$$

$$k_r = EI \frac{\int_0^l \left[ \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right]^2 dx}{Y^2(a)}$$

Z zależności (4) można obliczyć wartości parametrów dynamicznych modelu jeśli znamy postać funkcji  $Y(x)$ . Omawiana metoda jest metodą przybliżoną i stąd w zależnościach (4) należy przyjąć przybliżoną postać tej funkcji. Ogólnie zakłada się, że funkcja  $Y(x)$  może być dowolną funkcją spełniającą warunki brzegowe. Jednakże najmniejszy błąd popełniamy jeśli do obliczeń weźmiemy:

$$Y(x) = \{ \text{statyczna linia ugięcia osi belki pod obciążeniem własnym} \} \quad (5)$$

Przyjmując, zgodnie z rysunkiem 3, obciążenie belki w postaci obciążenia ciągłego o gęstości obciążenia  $q = m_b \cdot g / l$  i obciążenia dyskretnego  $P = M \cdot g$  ( $g$  – przyspieszenie ziemskie) działającego w punkcie  $a$  otrzymamy:  $q(x) = g \left( \frac{m_b}{l} \right) + M \delta(x-a)$ .



Rys. 3. Schemat do obliczenia linii ugięcia belki.

– dla belki jednostronnie utwierdzonej z masą skupioną:

$$Y(x) = \frac{m_b g l^3}{24EI} \{ 4\mu [(x_l - a_l)^3 \cdot H(x_l - a_l) - (x_l - 3a_l)x_l^2] + x_l^2(x_l^2 - 4x_l + 6) \} \quad (6)$$

– dla belki obustronnie swobodnie podpartej z masą skupioną:

$$Y(x) = \frac{m_b g l^3}{24EI} \{ 4\mu [(x_l - a_l)^3 \cdot H(x_l - a_l) - (x_l - 3a_l) \cdot [x_l^2 - a_l(2-a)]] + x_l(x_l^3 - 2x_l^2 + 1) \} \quad (7)$$

gdzie:  $\mu = M/m_b$ ,  $x_l = x/l$ ,  $a_l = a/l$ ,  $H(x'_l - a_l) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x_l = a_l \\ 0 & \text{dla } x_l = 0 \end{cases}$  funkcja skoku jednostkowego

Po podstawieniu zależności (6) i (7) do (4) otrzymamy związki opisujące wartości zredukowanej masy  $m_r$  i zredukowanej sztywności  $k_r$ .

W niniejszym opracowaniu nie przedstawiono końcowych zależności powyższych obliczeń z uwagi na ich złożoną postać. Obliczenia numeryczne dla konkretnych układów można przeprowadzić wykorzystując programy "BELKA" i "BELKA1". Przykładowo dla układu:

– z rysunku 1a: gdy  $a=l$  mamy:

$$m_r = M + 0.24m_b, \quad k_r = 3 \frac{EI}{l^3}$$

– z rysunku 1b: gdy  $a = 0.5 \cdot l$  mamy:

$$m_r = M + 0.49m_b, \quad k_r = 48.1 \frac{EI}{l^3}$$

Przejdźmy teraz do omówienia, drugiej metody. Wyznaczenie wartości zredukowanej sztywności  $k_r$  i zredukowanego współczynnika  $c_r$  przeprowadzimy w oparciu o założenie równości przemieszczeń drgań punktu redukcji a obiektu rzeczywistego i modelu:

$$Y(a, t) = y_r(t) \quad (8)$$

Rozpatrzmy zatem ruch modelu przedstawionego na rysunku 1c. Równanie ruchu drgań swobodnych modelu zapiszemy w postaci:

$$m_r \frac{d^2 y_r}{dt^2} + c_r \frac{dy_r}{dt} + k_r y_r = 0 \quad (9)$$

z warunkami początkowymi:

$$t = 0, \quad y_r(t) = y_0, \quad \frac{dy}{dt} = 0 \quad (10)$$

Rozwiązanie równania (9) z warunkami początkowymi (10) dla tłumienia podkrytycznego  $c_r < 2\sqrt{k_r \cdot m_r}$  ma następującą postać:

$$y_r(t) = A \cdot \exp(-\xi \omega_0 t) \cdot \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t + a) \quad (11)$$

gdzie:  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_r}{m_r}}$  częstość własna modelu,

$\xi = \frac{c_r}{2\sqrt{k_r \cdot m_r}}$  – stopień tłumienia modelu,

$A = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\xi \omega_0 y_0 + v_0}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}\right)^2}$  maksymalna amplituda drgań swobodnych,

$\alpha = \arctg\left(-\frac{\xi \omega_0 y_0 + v_0}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} y_0}\right)$  przesunięcie fazowe.

Z analizy rozwiązania (11) (rysunek 4) równania ruchu modelu (9) wynika, że masa  $m_r$  drga wokół położenia równowagi z częstością:

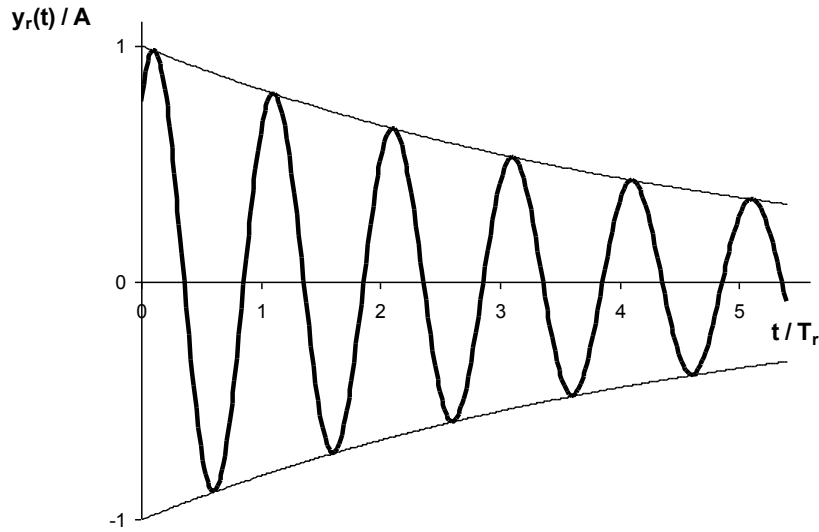
$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} . \quad (12)$$

Zatem okres drgań swobodnych tłumionych wynosi:

$$T_r = \frac{2\pi}{\omega_r} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} . \quad (13)$$

Zaś kolejne maksymalne wychylenia tworzą ciąg geometryczny o ilorazie równym:

$$\frac{y_r(t)}{y_r(t + T_r)} = \frac{A_i}{A_{i+1}} = \exp(\xi \omega_0 T_r) = \delta \quad (14).$$



Rys. 4. Wykres drgań swobodnych tłumionych uzyskany na podstawie rozwiązania (11) dla  $\xi = 0.2$

nazywanym dekrementem tłumienia drgań. Bardzo często wykorzystuje się logarytmiczny dekrement tłumienia drgań  $\Delta$  zdefiniowany następująco:

$$\Delta = \ln(\delta) = \ln\left(\frac{A_i}{A_{i+1}}\right) = \xi \omega_0 T_r \quad (15)$$

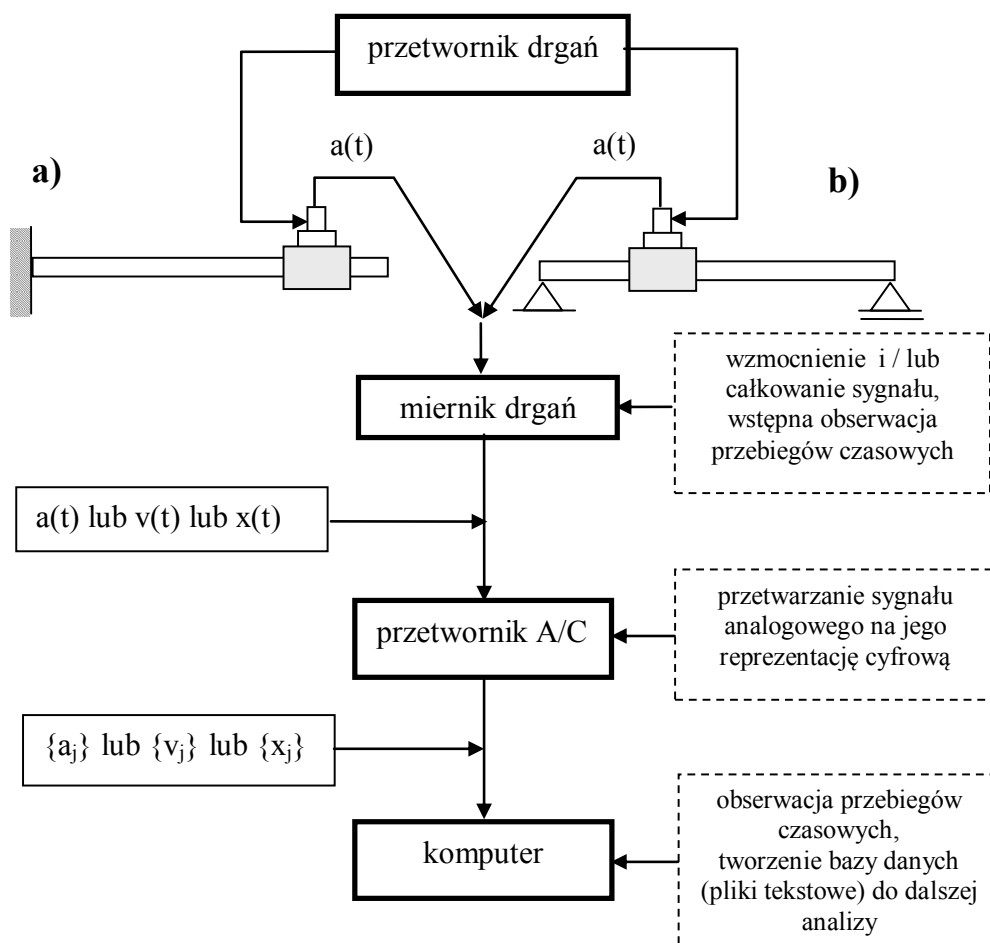
Stąd na podstawie zależności (11-15) dla znanej wartości zredukowanej masy układu  $m_r$  możemy obliczyć wartości zredukowanego współczynnika tłumienia  $c_r$  i zredukowanej sztywności  $k_r$ :

$$\begin{aligned} c_r &= \frac{2m_r \cdot \Delta}{T_r} \\ k_r &= \frac{4m_r}{T_r^2} (\pi^2 + \Delta^2) \end{aligned} \quad (16)$$

gdzie wartości logarytmicznego współczynnika tłumienia  $\Delta$  i okresu drgań swobodnych tłumionych  $T_r$  określamy na podstawie przebiegu przemieszczeń drgań swobodnych punktu redukcji obiektu rzeczywistego.

## 2. OPIS STANOWISKA

Stanowisko laboratoryjne składa się z dwóch części: mechanicznej i elektronicznego układu badawczego (rysunek 5).



Rys. 5. Schemat stanowiska laboratoryjnego: a, b – badane układy rzeczywiste.

Układ mechaniczny składa się ze statywu, w którym mocujemy belkę w układzie **a** lub **b**. Do belki, w dowolnym punkcie jej czynnej długości, mocujemy dodatkową masę  $M$ .

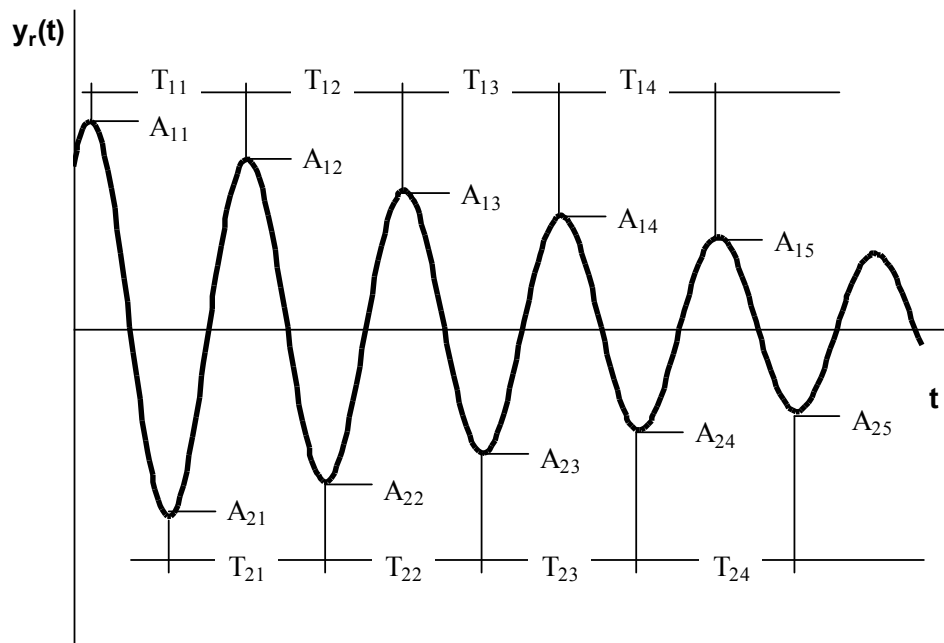
Pierwszym elementem elektronicznego układu pomiarowego jest piezoelektryczny przetwornik przyspieszeń drgań mocowany do dodatkowej masy układu mechanicznego. Umożliwia on transformację wielkości mechanicznych na elektryczne. Zatem uwzględniając własności przetwornika uzyskujemy sygnał elektryczny o napięciu proporcjonalnym do przyspieszenia drgań. Następnie sygnał ten może być wzmocniony i dalej dwukrotnie scałkowany (wzmacniacz z układem całkującym). Umożliwia to obserwację i następnie badania kolejnych wielkości mechanicznych – prędkości i przemieszczenia drgań. Wykorzystując przetwornik analogowo – cyfrowy uzyskujemy reprezentację cyfrową sygnałów analogowych w układzie wygodnym do dalszej analizy z wykorzystaniem odpowiednio oprogramowanego komputera.

## 3. SPOSÓB PRZEPROWADZENIA ĆWICZENIA.

Eksperyment najlepiej przeprowadzić zgodnie z podanymi poniżej wytycznymi:

- Dla wskazanego przez prowadzącego układu mechanicznego (rysunek 1a lub 1b) określić wartości wielkości materiałowo-geometrycznych:
  - masę  $M$  (masa dodatkowego ciężarka + masa uchwytu + masa czujnika drgań),
  - długość czynną belki  $l$ ,
  - współrzędną mocowania masy skupionej  $a$ ,
  - masę czynnej części belki  $m_b$  ( $m_b = \rho b h l$ ; gdzie  $\rho$  – gęstość materiału belki, można przyjąć, że belka jest stalowa: dla stali  $\rho = 7800 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ ;  $b$  – szerokość belki,  $h$  – grubość belki; **uwaga:** masę czynnej części belki można wyznaczyć też z proporcji ważąc belkę albo wyznaczając gęstość materiału belki  $\rho$ ,
  - moment bezwładności przekroju belki względem osi obojętnej  $I$  (dla belki o przekroju prostokątnym  $I = b h^3 / 12$ , gdzie  $b$  – szerokość belki,  $h$  – grubość belki),

**Uwaga:** w obliczeniach współczynnika sprężystości  $k_r$  przyjmując wartość modułu Younga  $E$  materiału belki dla stali  $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ [N/m}^2\text{]}$ ,
- Korzystając ze wzorów (4) i (6) lub (7) względnie z programów "BELKA" lub "BELKA1" obliczyć wartości zredukowanej masy  $m_r$  i zredukowanej sztywności  $k_r$  układu oraz jego częstotliwość własną zgodnie ze wzorem:  $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_r}{m_r}} \text{ [Hz]}$
- Pobudzić układ do drgań (wychylić układ z położenia równowagi) i zarejestrować przebieg drgań gasnących w komputerze a następnie na własnym nośniku.
- Na podstawie zarejestrowanych przebiegów drgań własnych układu dokonać obliczeń zgodnie z poniższą procedurą:



Rys. 6. Wykres drgań swobodnych tłumionych:

$A_{ij}$  – wartości kolejnych maksymalnych przemieszczeń układu,

$T_{ij}$  – okres drgań swobodnych tłumionych.

- Obliczyć średnią wartość okresu drgań swobodnych  $T_{rs}$  i logarytmicznego dekrementu tłumienia  $\Delta_{sr}$  zgodnie z zależnościami:



$$T_{rs} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n T_{1j} + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m T_{2j} \right), \quad T_{ij} = t_{ij+1} - t_{ij}, \quad (17)$$

$$\Delta_{sr} = \frac{1}{2} \left[ \ln \left( \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \frac{A_{ij}}{A_{ij+1}} \right) + \ln \left( \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l \frac{A_{2j}}{A_{2j+1}} \right) \right] \quad (18)$$

gdzie  $i = 1$  dotyczy dodatniej a  $i = 2$  ujemnej części wykresu.

- Korzystając ze wzorów (16) obliczyć wartości zredukowanego współczynnika tłumienia  $c_r$  i zredukowanej sztywności  $k_r$  oraz stopień tłumienia  $\xi$  przyjmując wcześniej wyznaczoną masę zredukowaną  $m_r$ .
- Narysować przybliżoną charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową badanego układu. Charakterystyka ta zawiera informację o zachowaniu się układu rzeczywistego pod działaniem harmonicznej siły wymuszającej o częstotliwości bliskiej częstotliwości własnej układu, gdyż definicyjnie jest to funkcja amplitudy drgań wymuszonych ustalonych  $A_w$  w zależności od częstotliwości siły wymuszającej  $f$ ,  $A_w = A_w(f)$ .
- Na podstawie przeprowadzonych badań analityczno-eksperymentalnych, korzystając z danych zawartych w [1] (rozdział 4), możemy wyznaczyć charakterystyczne punkty funkcji  $A_w(f)$ . I tak:

$$\frac{A_w}{y_{st}} = \begin{cases} 1 & \text{dla} & f = 0 & \text{punkt B} \\ \frac{Q}{\sqrt{2}} & \text{dla} & f \approx f_0 - \frac{\Delta f}{2} & \text{punkt D} \\ Q = \frac{\pi}{\Delta_{sr}} & \text{dla} & f \approx f_0 & \text{rys. 7 punkt C} \\ \frac{Q}{\sqrt{2}} & \text{dla} & f \approx f_0 + \frac{\Delta f}{2} & \text{punkt E} \\ 0 & \text{dla} & f \rightarrow \infty & \end{cases}$$

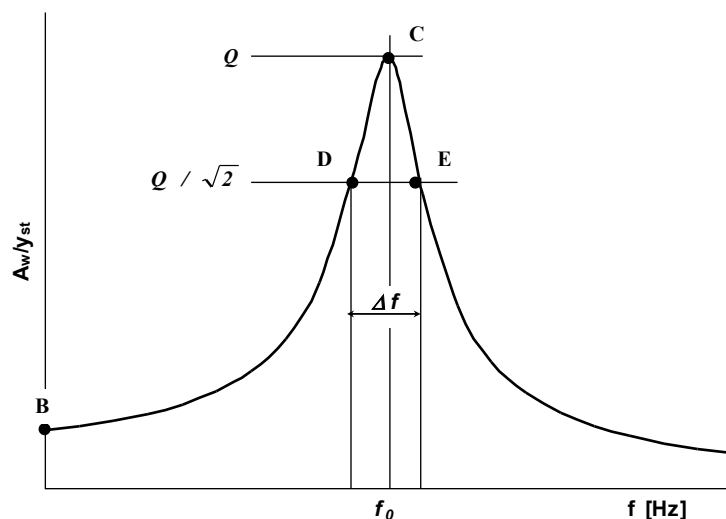
gdzie:

$y_{st} = F_0/k_r$  – ugięcie statyczne,

$F_0$  – amplituda siły wymuszającej,

$Q$  – dobroć układu; wielkość opisująca zdolność układu do akumulowania energii.

$\Delta f$  – szerokość połówkowa krzywej rezonansowej,  $\Delta f = \frac{f_0 \cdot \Delta}{2\pi} = \frac{f_0}{2Q}$ .



Rys. 7. Przybliżona charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa układu.

#### 4. ZAWARTOŚĆ OPRACOWANIA.

Opracowanie ćwiczenia powinno zawierać następujące elementy:

- cel ćwiczenia,
- schemat stanowiska badawczego,
- przebieg drgań zanikających badanego układu,
- zestawienie wartości parametrów dynamicznych układu wyznaczonych na drodze obliczeń numerycznych i badań eksperymentalnych:
  - zredukowanej masy  $m_r$ ,
  - zredukowanej sztywności  $k_r$ ,
  - zredukowanego współczynnika tłumienia  $c_r$ ,
- zestawienie innych wartości parametrów charakteryzujących drgania swobodne układu o jednym stopniu swobody:
  - częstotliwość drgań swobodnych tłumionych  $\omega_r$  i nietłumionych  $\omega_o$ ,
  - stopień tłumienia  $\xi$ ,
  - logarytmiczny dekrement tłumienia  $\Delta$ ,
  - przybliżoną charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową układu.